LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM
HERAUSGEGEBEN
VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

12. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck

II. AUSGABE

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9083 II/12

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

12. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1969

II. AUSGABE

Nach der Vorlesung
von Prof. Dr. phil. (em.) Georg Mierdel

verfaßt für das Fernstudium
von Dr.-Ing. Edgar Drechsler

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN · 1969

VT-Bestell-Nr. 9 083 II/12 · Auflage 2700 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/323/69/DDR
Verfaßt für das Direktorat für Weiterbildung der Technischen Universität Dresden · Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, 102 Berlin
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza

[75] Nichtstationäre Trägerbewegung (Fortsetzung)

2. Verhalten elektromagnetischer Wellen in ionisierten Gasen: Interessant und technisch wichtig ist die Beeinflussung elektromagnetischer Wellen durch die Ionosphäre. Es handelt sich hier um eine für die Hochfrequenztechnik wichtige Problemstellung, da sie die Fortpflanzungsverhältnisse von Funkwellen in der sog. Heavisideschicht betrifft, in der vorwiegend unter der Einwirkung der Sonnenstrahlung eine merkliche Ionisation herrscht. Treffen auf diese Schicht elektromagnetische Wellen auf, so werden die Träger in Schwingungen versetzt, wodurch eine Rückwirkung auf die Welle zustandekommt.

a) Das Verhalten der Dielektrizitätskonstanten: Die Rückwirkung der Ionosphäre auf Rundfunkwellen geht im wesentlichen von den freien Elektronen aus, da die Trägheit der Ionen zu groß ist. Infolge der geringen Schwingungsamplitude der Elektronen dürfen darüber hinaus auch die Zusammenstöße mit anderen Teilchen (Dämpfung) in erster Näherung vernachlässigt werden. Setzen wir demgemäß $\varrho = 0$, so lautet die Bewegungsgleichung nach (757) in vektorieller Form

$$m\dot{v} = q\mathfrak{E}$$

Da die Vektoren v und $\mathfrak{E}$ gleichzeitig auch Zeiger sind, wenden wir den jω-Operator an und schreiben

$$j\omega m v = q\mathfrak{E} \quad ,$$

woraus

$$v = -j\frac{q}{m\omega}\mathfrak{E}$$

folgt. Die rhythmisch bewegten Elektronen bilden einen Leitungsstrom (Konvektionsstrom) von der Dichte

$$\mathcal{J} = q\, n_e v = -j\frac{q^2 n_e}{m\omega}\mathfrak{E} \qquad (764)$$

Für die Entstehung und Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen sind natürlich die Maxwellschen Gleichungen (117) und (118) zuständig. Von Gl. (118), also vom Durchflutungsgesetz ausgehend, wird

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathcal{J} + \varepsilon_0\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \mathcal{J} + j\omega\varepsilon_0\mathfrak{E},$$

und durch Einsetzen von (764) ergibt sich

$$\text{rot}\,\mathcal{J} = -\,j\,\frac{q^2\,n_e}{m\omega}\,\mathcal{E} + j\omega\varepsilon_o\mathcal{E} = j\omega\,\mathcal{E}\,(\varepsilon_o - \frac{q^2\,n_e}{m\omega^2}) \qquad (765)$$

Dieselbe Gl. (118) lautet <u>ohne</u> Leitungsstrom, also angewendet auf das Vakuum,

$$\text{rot}\,\mathcal{J} = \varepsilon_o\frac{d\mathcal{E}}{dt} = j\omega\varepsilon_o\mathcal{E} \qquad (766)$$

Maßgebend für das Verhalten der elektromagnetischen Wellen in der Ionosphäre ist die Abweichung von der Dielektrizitätskonstanten ε_o des Vakuums. Die effektive Dielektrizitätskonstante ε_{eff} ergibt sich aus einem Vergleich der beiden Beziehungen (765) und (766) zu

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_o - \frac{q^2\,n_e}{m\omega^2} = \varepsilon_o(1 - \frac{q^2 n_e}{m\varepsilon_o\omega^2}) \qquad (767)$$

Führen wir nun eine Frequenz

$$\omega_o = \sqrt{\frac{q^2\,n_e}{m\varepsilon_o}} \qquad (768)$$

ein, die wir <u>Plasmafrequenz</u> nennen wollen, so wird aus Gl. (767)

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_o\left[1 - (\frac{\omega_o}{\omega})^2\right] \qquad (769)$$

Gemäß (769) kann also die effektive Dielektrizitätskonstante positiv, Null oder negativ sein. Sie verschwindet dann, wenn die Frequenz ω der eintretenden Welle gerade gleich der Plasmafrequenz ω_o ist.
Das geometrisch-optische Verhalten eines Wellenstrahles ist durch den Brechungsindex ν gegeben, der mit der Dielektrizitätskonstanten zusammenhängt durch die Beziehung

$$\nu = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{eff}} \qquad (770)$$

Der Brechungsindex kann danach also auch imaginär werden. Die sich daraus ergebenden Folgerungen über das Verhalten der in ein Plasma eindringenden elektromagnetischen Wellen übergehen wir hier.

5. Kapitel: Die Elektrizitätsleitung in Gasen und Dämpfen (Gasentladungen)

[76] Allgemeine Gesichtspunkte

1. Stromverteilung: Im Gegensatz zur Hochvakuumentladung, bei der die Stromträger ausnahmslos freie Elektronen sind, muß man bei einer Gasentladung mit Trägern aller nur möglichen Sorten rechnen. Diese tragen dann nach Maßgabe ihrer Dichte n, Ladung q und gerichteten Geschwindigkeit u zum Gesamtstrom bei. Die Dichte des letzteren wird also

$$G = \sum_\nu G_\nu = \sum_\nu n_\nu q_\nu u_\nu \tag{771}$$

In sehr vielen Fällen kann man sich auf nur zwei Trägersorten beschränken, nämlich freie Elektronen und einfach geladene positive Ionen. Die Stromdichte wird dann

$$G = q\,(n^- u^- + n^+ u^+) \tag{772}$$

In quasineutralen Gebilden (Plasma) wird außerdem noch $n^+ = n^- = n$, und es gilt mit (732)

$$G = q\,n\,(u^- + u^+) = q\,n\,(b^- + b^+)\,E \tag{773}$$

Der Strom verteilt sich also in diesem Fall auf die beiden Trägerarten entsprechend ihren Beweglichkeiten b, so daß dann der durch Elektronen getragene Strom den durch positive Ionen getragenen weit übertrifft. Diese beiden Ströme unterscheiden sich beispielsweise in Hg-Dampf etwa um den Faktor 600.
Auch hier gilt, daß der Gesamtstrom quellenfrei sein muß, also

$$\operatorname{div} \mathcal{G} = 0$$

Für die Teilströme dagegen ist im allgemeinen

$$\operatorname{div} \mathcal{G}_\nu \neq 0$$

Im eindimensionalen Entladungsfeld gilt also

> Die Gesamtstromdichte ist von x unabhängig, während die Teilstromdichten von x abhängen dürfen.

Beispiel: Gegeben sei ein homogenes Längsfeld, das durch Raumladungswirkungen nicht verzerrt sein mag. In einer Querschnitts-

schicht der Dicke d werden durch Röntgenstrahlen Trägerpaare (positive Ionen und Elektronen) erzeugt. Rechts von dieser Schicht (Bild 357) wird der Strom dann also nur von Elektronen und links nur von Ionen getragen. In der Schicht wechselt das Stromverhältnis G^+/G^- von Ort zu Ort. Durch jeden Querschnitt fließt aber der gleiche Gesamtstrom, nur die Anteile G^+ bzw. G^- sind voneinander verschiedene Ortsfunktionen.

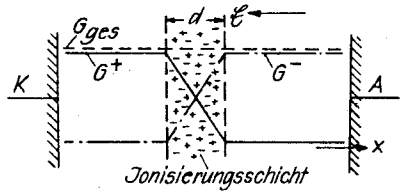


Bild 357
Stromverteilung in einer ionisierten Querschicht

Wenn sich innerhalb eines Plasmas ein kleiner, als Rekombinationszentrum wirkender Schwebekörper (Staubkorn) befindet, gilt dicht vor dessen Oberfläche $n^+ = n^- = n = 0$. Durch eine umhüllende beliebige Fläche strömt wegen der einsetzenden Diffusion in der Zeiteinheit dieselbe Menge Elektronen wie Ionen (ambipolare Diffusion). Die umhüllende Fläche schließt somit keine Quellen oder Senken des Gesamtstromes G ein, so daß also wiederum $\operatorname{div} \mathfrak{g} = 0$ gilt. Der Innenraum enthält dagegen für Elektronen wie auch für Ionen je eine Senke, und es gilt

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{g}^+ dV = \int \operatorname{div} \mathfrak{g}^- dV < 0$$

Dies folgt aus dem Gaußschen Satz

$$\int_V \operatorname{div} \mathfrak{g}\, dV = \int_S \mathfrak{g} \cdot d\mathfrak{f}$$

2. <u>Ladungstransport in ionisierten Gasen:</u> Anknüpfend an die Überlegungen auf Seite 506, müssen wir uns fragen, welchen Einfluß die Anwesenheit positiver Ionen auf den Stromtransport ausübt. Zunächst könnte man folgern, daß der Strom durch zusätzlich vorhandene positive Ladungsträger ver-

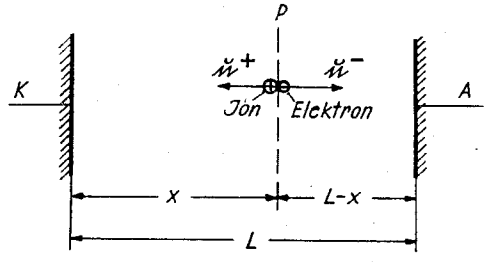


Bild 358
Zur Stromleitung in ionisierten Gasen

stärkt wird. Gründlichere Überlegungen zeigen jedoch, daß dies keineswegs der Fall ist.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 möge an einer zwischen Katode K und Anode A liegenden Stelle P (Bild 358) eine Ionisation erfolgen, d.h., es sollen ein Elektron und ein positives Ion entstehen Das Elektron influenziert auf beiden Elektroden positive Ladungen und bei seiner Wanderung zur Anode fließt die auf der Katode sitzende Influenzladung durch den äußeren Stromkreis zur Anode hin ab, um sich dort beim Eintreffen des Elektrons mit dessen negativer Ladung zu vereinigen (vgl. auch Bild 275). Da das Elektron nicht den gesamten Elektrodenabstand d zurückgelegt hat, ist das erreichte Zeitintegral des Stromes

$$\int_{t_P}^{t_A} i^- \, dt \qquad \text{kleiner als seine Ladung } q.$$

Das positive Ion influenziert auf den Elektroden negative Ladungen, deren Verschiebung im Laufe der Wanderung des Ions von P zur Katode K gerade den beim Elektron fehlenden Betrag ergänzt. Die dieser Verschiebung entsprechende Ladungsbewegung im äußeren Stromkreis ist gleich der Ladung, die ein Elektron beim Flug von K nach P in Bewegung setzen würde. Der hierbei auftretende Unterschied im zeitlichen Ablauf des Vorganges spielt bei der Ladungsbilanz keine Rolle. Während des ganzen Vorganges hat also gerade die Ladung q den äußeren Stromkreis (Stromquelle, Oszillograf) durchlaufen. Die Ladungsbilanz lautet mithin

$$\int_{t_P}^{t_A} i^- dt + \int_{t_P}^{t_K} i^+ dt = q$$

3. Raumladungswirkungen: Im Falle mehrerer Trägersorten ist für die Raumladungsdichte ϱ zu setzen

$$\varrho = \sum_\nu n_\nu q_\nu \qquad (774\text{ a})$$

Da man, wie oben bereits erwähnt, in den meisten Fällen mit zwei Trägersorten (Elektronen und positive Ionen) ausreicht, wird einfach

$$\varrho = q\,(n^+ - n^-) \qquad (774\text{ b})$$

Grundsätzlich sind auch hier das Ortspotential φ und die Raumladungsdichte ϱ durch die Poissonsche Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o}$$

verknüpft. Für unseren Fall gilt also

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{\varepsilon_o}(n^+ - n^-) \qquad (775)$$

Bei gegebenen Randbedingungen an den Elektroden läßt sich damit der Potentialverlauf grundsätzlich berechnen. Meistens ist aber die Raumladungsverteilung $\varrho(xyz)$ nicht bekannt, da sie sich erst aus der Ionenbewegung und diese wieder aus dem Feldverlauf ergibt. Die gegenseitige Beeinflussung beider Funktionen ist mathematisch schwer zu erfassen.

Im Plasma kann die Raumladung infolge der schon erwähnten Quasineutralität in erster Näherung vernachlässigt, also $\varrho = 0$ gesetzt werden. Das Feld ist dann nur durch Anordnung und Form der Elektroden bestimmt.

Auch bei sehr schwachen Strömen und hohen Elektrodenspannungen, wie beispielsweise kurz vor der Zündung einer Entladung, ist eine Vernachlässigung der Raumladungen noch zulässig.

4. Ähnlichkeitsgesetze: In der Physik der Gasentladungen spielen Ähnlichkeitsbetrachtungen eine große Rolle. Sie gestatten, wie auch in anderen Gebieten der Physik und Technik (z.B. Hydrodynamik), eine vernünftige Zusammenfassung der Variablen und damit eine übersichtliche Darstellung von Meß- und Rechenergebnissen. So wurde beispielsweise bei der Darstellung von Messungen des Townsendschen Stoßkoeffizienten α (Bild 338)

$$\frac{\alpha}{p} = f\left(\frac{p}{E}\right)$$

aufgetragen. In diesem Falle ist in einer Kurve all das enthalten, wozu bei einer Aufzeichnung

$$\alpha = f(E,p)$$

eine ganze Kurvenschar nötig wäre.

Für stationär brennende Gasentladungen gilt folgendes Ähnlichkeitsgesetz:

> Ist in einer Entladungsstrecke eine stationäre Entladung bei der Spannung U und dem Strom J möglich, so kann bei gleichen

Spannungs- und Stromwerten auch in jeder geometrisch ähnlichen und aus gleichen Werkstoffen bestehenden Entladungsstrecke eine stationäre Entladung brennen.

Geometrische Ähnlichkeit bedeutet, daß alle einander entsprechenden linearen Abmessungen (Elektrodenabstand, Rohrradius, Rohrlänge) zweier Entladungsstrecken im gleichen Verhältnis a zueinander stehen. Insbesondere gehört hierzu auch die mittlere freie Weglänge λ der Gasmolekeln oder Träger. Da der Durchmesser der Molekeln naturgemäß nicht verändert werden kann, muß zur Angleichung der freien Weglängen die Gasdichte δ im Verhältnis a^{-1} verändert werden. Das größere Entladungsrohr hat also stets die geringere Gasdichte und - bei gleicher Gastemperatur - den geringeren Druck.

In folgender Übersicht sind die Faktoren zusammengestellt, mit denen die einzelnen Kenngrößen der Entladung multipliziert werden müssen, wenn man von einer Entladungsstrecke auf eine ähnliche, im Verhältnis a transformierte Entladungsstrecke übergeht:

Kenngröße	Faktor	Kenngröße	Faktor
Strom J	1	Volumina V	a^3
Spannung U	1	Gasdichte δ / Gasdruck p	a^{-1}
Linearabmessungen:		Gradient E	a^{-1}
Elektrodenabstand d	a	Stromdichte G	a^{-2}
Rohrradius R	a	Laufzeit der Träger t	a
Freie Weglänge λ	a		
Oberflächen S	a^2		

Durch Kombinationen lassen sich aus dieser Aufstellung folgende weitere Invarianten ableiten:

$$R \cdot p \quad , \quad \frac{R}{\lambda} \quad , \quad \frac{L}{\lambda} \quad , \quad \frac{E}{p} \quad , \quad E\lambda \quad , \quad \frac{G}{p^2} \quad , \quad G\lambda^2 \qquad (776)$$

Einige wichtige Größen lassen sich beispielsweise wie folgt transformieren:

Townsendscher Stoßkoeffizient α: Da der Verstärkungsfaktor $V = e^{\alpha d}$ (Gl. 714a) als Verhältnis zweier Ströme invariant sein muß, folgt dies auch für das Produkt $\alpha \cdot d$. Demnach muß aber auch α/p

eine Invariante sein, womit die Darstellung

$$\frac{\alpha}{p} = f(E/p)$$

begründet ist.

Thermische Geschwindigkeit v: Die Träger durchlaufen auf ähnlichen Wegen gleiche Potentialdifferenzen und stoßen gleich oft mit Molekeln zusammen. Ihre energetischen Verhältnisse sind deshalb an homologen Punkten vollständig gleich. Daraus folgt aber die Invarianz sowohl der Trägertemperaturen als auch der Gastemperaturen, soweit diese durch die Trägergenetik bestimmt werden.

Driftgeschwindigkeit u: Aus der Beziehung

$$u = b\,E = \frac{q\lambda}{mv}\,E = \frac{q}{mv}\,(E \cdot \lambda)$$

folgt, daß auch die Driftgeschwindigkeit u invariant ist.

Raumladungsgesetz (Hochvakuum!). Da im Hochvakuum $\lambda \to \infty$ geht, wird $p \approx 0$. Damit lassen sich auch in diesem Falle Ähnlichkeitsbeziehungen aufstellen. Dies gilt beispielsweise für das Raumladungsgesetz (667), das sich auf die Form

$$G \cdot d^2 = \text{konst}\ U_a^{3/2}$$

bringen läßt, wobei das Produkt $G \cdot d^2$ als invariant anzusehen ist.

Die auf der Grundlage linearer Beziehungen aufgebauten Ähnlichkeitsgesetze gelten nicht, wenn sogenannte quadratische Prozesse in der Entladung eine quantitative Rolle spielen. Quadratische Prozesse sind hauptsächlich:

die Rekombination, deren Häufigkeit proportional dem Quadrat der Trägerdichte ist und
die Stufenionisation, deren Häufigkeit dem Quadrat der Elektronendichte und damit auch dem Quadrat der Stromdichte proportional ist.

Findet man experimentell Abweichungen vom Ähnlichkeitsgesetz, so kann man meist schließen, daß dann derartige quadratische Prozesse in der Trägererzeugung eine quantitativ nicht zu vernachlässigende Rolle spielen.

[77] Typische Entladungsteile. Die vielfältigen Erscheinungsformen der Gasentladung lassen sich meist auf einige wenige typische Teilformen zurückführen, aus denen sie zusammengesetzt

sind. Diese Entladungsteile kehren mit Abwandlungen immer wieder beim Aufbau der Entladung und lassen sich als solche durch gewisse typische Merkmale leicht kennzeichnen.

1. Das Plasma

a) Kennzeichnung: Ein Plasma ist ein hochgradig ionisiertes Gas. Es besteht aus neutralen Molekeln, Elektronen und Ionen beiderlei Vorzeichens, ferner auch aus Strahlungsquanten und angeregten Molekeln. In erster Näherung ist in einem solchen Gas die Dichte der positiven Träger überall gleich der Dichte der negativen Träger. Mit anderen Worten, das Plasma ist elektrisch neutral, und die Raumladungsdichte verschwindet. In zweiter Näherung können sich jedoch geringe Unterschiede der Trägerdichten ausbilden, so daß Raumladungen und damit Feldverzerrungen entstehen. Man sagt daher auch, das Plasma ist quasineutral.
Die Quasineutralität ist eine Folge der hohen Trägerdichte und der damit gegebenen hohen Leitfähigkeit, die den Aufbau großer Raumladungen verhindert. In vielen Fällen ist überdies die Trägerdichte so groß, daß die energie- oder impulsaustauschenden Zusammenstöße der Träger untereinander nicht mehr gegenüber den Stößen mit den neutralen Teilchen zu vernachlässigen sind.
Zur vollständigen Erfassung aller Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Plasmapartnern müssen auch die angeregten Molekeln (metastabile Zustände) und die Strahlungsquanten berücksichtigt werden.
Grundsätzlich unterscheidet man feldfreie Plasmen und Plasmen mit elektrischen Feldern. Plasmen ohne elektrische Felder sind beispielsweise die Flammengase, die Sternatmosphären und die irdische Ionosphäre. Beispiele für Plasmen mit elektrischen Feldern sind die positive Säule der Reklameleuchtröhren, des Quecksilberbogens bei Nieder- und Hochdruck, der Lichtbögen zwischen Kohleelektroden in freier Luft und andere Entladungen dieser Art. Ein echtes Plasma bildet sich hier allerdings erst in einiger Entfernung von den Elektroden aus, weil diese das Feld in ihrer Umgebung stören.

b) Temperatur der Plasmabestandteile: In einem feldfreien Plasma besteht thermisches Gleichgewicht, d.h., die Temperaturen aller Plasmabestandteile sind einander gleich. Für die Effektivwerte der thermischen Geschwindigkeit gilt die schon früher erwähnte

Beziehung (730). Darüber hinaus erstreckt sich das thermische Gleichgewicht auch auf angeregte Zustände und ionisierte Atome. Das bedeutet beispielsweise, daß sich der Ionisationsgrad in einem solchen Plasma nach der Eggert-Saha-Formel (720) berechnen läßt.

Ist dagegen ein elektrisches Feld vorhanden, wie in allen Gasentladungen, so ist im allgemeinen das Plasma nicht mehr isotherm. Die Elektronen werden dann nämlich im elektrischen Feld beschleunigt und nehmen dabei dauernd Energie aus dem Felde auf, die sie im stationären Fall durch Stöße wieder an positive Ionen und Molekeln des Grundgases abgeben. Es fließt also ein Energiestrom vom Elektronengas zum Grundgas. Die Temperatur des ersteren (T^-) muß daher zwangsläufig höher sein als die Gastemperatur (T_g). Der Temperaturunterschied $T^- - T_g$ hängt von der Größe des Wärmewiderstandes zwischen Elektronen und Grundgas ab, genauso wie etwa die Temperaturdifferenz zwischen einem Ofen und der Zimmerluft von dem Wärmeübergang an der Ofenoberfläche abhängt.

Es hat sich gezeigt, daß insbesondere bei Niederdruckentladungen, wie beispielsweise im Plasma eines Quecksilberdampfgleichrichters oder einer Edelgasleuchtröhre, stets die Elektronentemperatur die Gastemperatur um ein Vielfaches übersteigt. Für die Elektronentemperatur sind Werte von einigen 10^4 °K keine Seltenheit, während die Temperatur des Grundgases 1000°K kaum übersteigt. Diese großen Temperaturunterschiede sind auf den sehr schlechten Wärmekontakt des Elektronengases mit dem Molekelgas zurückzuführen. Die Ursache hierfür ist letzten Endes die Verschiedenheit der beiden Massen der Stoßpartner, die nach (719) die Übertragung nur sehr kleiner Energiemengen je Stoß gestattet.

Trotzdem kann auch beim Vorhandensein elektrischer Felder der Temperaturunterschied zwischen Elektronen und Gasmolekeln unerheblich werden. Wächst nämlich die Gasdichte, so sinkt mit zunehmendem Strom die Elektronentemperatur entsprechend Bild 359 und nähert sich etwa bei Drücken in der Größenordnung von 1 atm der Gastemperatur, die im allgemeinen mit der Gasdichte ansteigt. Im Plasma eines normalen, in freier Luft brennenden Kohlelichtbogens liegt beispielsweise die Elektronentemperatur nur noch um etwa 100° über der in diesem Falle 6000°K betragenden Gastemperatur. Die Angleichung der beiden Temperaturen bei hohen Gasdichten

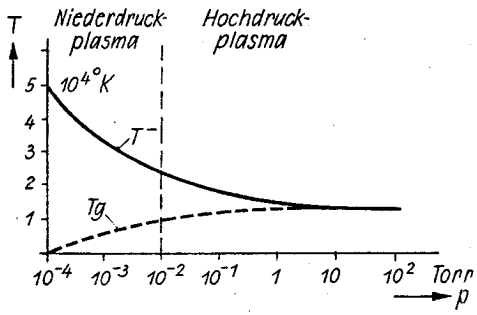


Bild 359
Elektronentemperatur (T^-) und Gastemperatur (T_g), abhängig vom Gasdruck
[Hg-Dampfsäule bei 3 A; Rohrweite 3,2 cm]

(vgl. Bild 359) kommt deshalb zustande, weil jetzt wegen der vergrößerten Stoßzahl der Wärmekontakt zwischen Elektronen und Grundgas enger wird. Es ist daher sinnvoll, zwischen Hochdruck- und Niederdruckentladungen bzw. -plasmen zu unterscheiden.

c) Sondenmessungen und ihre Auswertung

α) Aufnahme einer Sondenkennlinie (Langmuir): Eine wichtige Methode zur Erforschung des Plasmazustandes ist das Kennlinienverfahren. Man benutzt als Sonden kleine Metallelektroden, die eben, kugelförmig oder zylindrisch sein können.

Wir erläutern das Kennlinienverfahren am theoretisch einfachsten Fall einer ebenen Sonde, die selbst so groß sein soll, daß die Randwirkungen vernachlässigt werden können. Dieser Sonde zwingen wir über eine isolierend abgeschirmte Zuleitung eine veränderliche Spannung U_s auf und messen jeweils den dabei fließenden Sondenstrom i_s. Das Schema der Meßanordnung zeigt Bild 360.

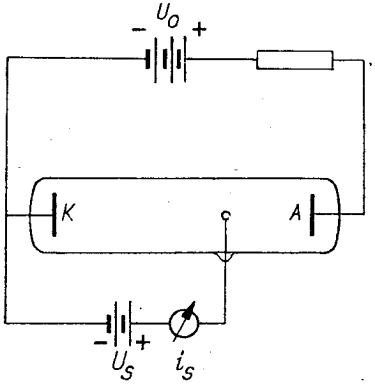


Bild 360
Anordnung zur Messung der Sondenkennlinie

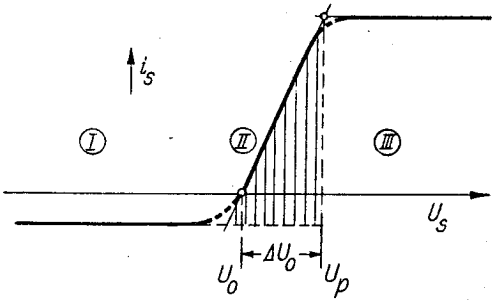


Bild 361
Ideale Kennlinie einer ebenen Sonde (schematisch)

Die so aufgenommene Sondenkennlinie $i_s(U_s)$ besteht aus drei ziemlich scharf gegeneinander abgegrenzten Bereichen (vgl. Bild 361).

Ist die Sonde stark negativ gegenüber dem Plasmapotential U_p an ihrem Ort aufgeladen (Bereich I), so werden alle negativen Träger von ihr abgestoßen, und nur die positiven können die Sonde erreichen. Die von ihr empfangene Stromdichte errechnet sich nach der gaskinetischen Formel für die Stoßzahl auf eine Fläche zu

$$G_s^+ = \frac{1}{4} q\, n^+ v^+ \tag{777}$$

Dieser Strom ist ein Sättigungsstrom und im Idealfall von U_s unabhängig.

Ist die Sonde stark positiv gegen das Plasmapotential am Sondenort aufgeladen (Bereich III), so wird die Sättigungsstromdichte entsprechend

$$G_s^- = \frac{1}{4} q\, n^- v^- \tag{778}$$

v^+ und v^- sind hier die „Mittelwerte" (s.S.441).

Das Übergangsgebiet (Bereich II), also das Gebiet in der Nähe des Plasmapotentials, wird vom Anlaufstrom der Elektronen ausgefüllt. Es ist dies der Einstrom derjenigen Elektronen, die infolge der ihnen eigenen kinetischen Energie gegen ein schwaches Sondenpotential anlaufen können [1]. Selbstverständlich überlagert sich diesem Anlaufstrom der Elektronen auch noch ein Strom positiver Ionen, da die Sonde negativ gegen das Plasma aufgeladen ist. Man muß daher den für dieses Spannungsintervall extrapolierten Ionenstrom dem gemessenen Gesamtstrom zuzählen, um den reinen Anlaufstrom der Elektronen zu gewinnen. Ein entsprechender Anlaufstrom positiver Ionen tritt wegen ihrer niedrigen Temperatur nicht in Erscheinung. Der in vorstehend beschriebener Weise korrigierte Anlaufstrom der Elektronen genügt der Gleichung

$$G_a = G_s^- e^{-\left|\frac{qU}{kT}\right|} = \frac{1}{4} |q|\, n^- v^-\ e^{-\left|\frac{qU}{kT}\right|}, \tag{779}$$

wobei U die Potentialdifferenz zwischen Sonde und Plasma ist.

β) Temperatur der Elektronen: Aus der Steilheit der Anlaufkennlinie (Bereich II) läßt sich die Temperatur der Elektronen ziemlich genau ermitteln, wenn man $i_s(U_s)$ logarithmiert und gegen U_s

1) Einen ähnlichen Fall haben wir früher an einer Glühkatode im Hochvakuum kennengelernt.

aufträgt. Besitzen die Elektronen eine Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeit, so muß sich eine Gerade ergeben, deren Neigung die Elektronentemperatur T^- gibt.

γ) Das Plasmapotential am Sondenort: Ein weiteres Bestimmungsstück, das sich aus der vollständigen Sondenkennlinie ableiten läßt, ist das im Plasma am Ort der Sonde herrschende Potential. Dieses ist durch den Punkt gegeben, an dem der Anlaufstrom in den Sättigungsstrom der Elektronen übergeht. Hier weist also die Kennlinie einen Knick auf, der allerdings selten so scharf ist wie ihn die ideale Sondenkennlinie in Bild 361 zeigt. Vielmehr verläuft der Übergang mehr in der durch die gestrichelte Kurve angedeuteten Form. Man kann in diesem Falle trotzdem das Plasmapotential durch die Konstruktion der Tangenten genau genug ermitteln.

δ) Das Potential der stromlosen Sonde (Nullpotential): Wird der Saugstrom positiver Ionen gleich dem Elektronenanlaufstrom, so nimmt die Sonde insgesamt keinen Strom auf. Wir bezeichnen das Potential der Sonde in diesem Fall als statisches Potential oder Nullpotential U_o. Für $i_s = 0$ gilt die Bedingung

$$G_s^+ = G_a$$

oder bei Verwendung von (777) und (779)

$$\frac{1}{4} q\, n^+ v^+ = \frac{1}{4} q\, n^- v^-\, e^{-\left|\frac{q \Delta U_o}{kT^-}\right|},$$

wenn ΔU_o der Unterschied zwischen Nullpotential und Plasmapotential ist. (Bild 361).

Bei Berücksichtigung der Quasineutralität ($n^+ = n^-$) folgt daraus ohne weiteres

$$\left|\Delta U_o\right| = \frac{kT^-}{q} \ln \frac{v^-}{v^+} \qquad (780)$$

Um diesen Betrag muß daher das mit einer statischen, d.h. stromlosen, Sonde gemessene Potential erhöht werden, um das wahre Plasmapotential am Sondenort zu bekommen.

Setzen wir gemäß (566c)

$$v^- = \sqrt{\frac{8\, kT^-}{\pi m^-}} \quad \text{und} \quad v^+ = \sqrt{\frac{8\, kT^+}{\pi M^+}},$$

so wird

$$\frac{v^-}{v^+} = \sqrt{\frac{T^- M^+}{T^+ m^-}},$$

und das Nullpotential ΔU_o (bezogen auf das Raumpotential am Ort der Sonde) lautet

$$|\Delta U_o| = \frac{kT^-}{q} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T^- M^+}{T^+ m^-}\right) \qquad (781)$$

Soviel zur ebenen Sonde. In der Praxis werden meist Zylindersonden (dünne Drähte), seltener auch Kugelsonden verwendet. Es gelten in diesen Fällen andere Gleichungen für die Sondenkennlinien, wobei allerdings die oben angeführten grundsätzlichen Überlegungen bestehen bleiben.

2. Die positive Säule: Die hauptsächlichste Erscheinungsform des Plasmas ist die positive Säule. Sie ist ein für Glimm- und Bogenentladungen typischer Entladungsteil, der bei nicht zu kleinem Elektrodenabstand fast den ganzen Entladungsraum ausfüllt. Der durch die Säule fließende Strom verteilt sich auf Träger beider Vorzeichen im Verhältnis ihrer Beweglichkeiten. Sind die negativen Träger freie Elektronen, wie in Edelgasen und Metalldämpfen, so kann der Stromanteil der Ionen gegenüber dem der Elektronen vernachlässigt werden. Die Elektronen übernehmen dann praktisch den gesamten Strom, und die Ionen dienen ausschließlich zur Kompensation der Raumladung.

a) Die Niederdrucksäule

α) Diffusionstheorie: Bei niedrigen Gasdrucken besteht im Säulenplasma kein Temperaturgleichgewicht (vgl. Bild 359). Es gilt vielmehr $T^- \gg T_g$. Wir dürfen daher den Ionisationsgrad x nicht mehr nach der Eggert-Saha-Formel berechnen, sondern müssen das Gleichgewicht zwischen Trägerbildung und -vernichtung aus den Elementarprozessen betrachten. Die Trägererzeugung erfolgt allein durch Elektronenstoß. Für die Trägervernichtung kommt wegen des bei geringen Drücken zu kleinen Rekombinationskoeffizienten [1] nur Rekombination an der Rohrwand in Betracht, zu der die Träger durch ambipolare Diffusion gelangen. Da anzunehmen ist, daß jeder

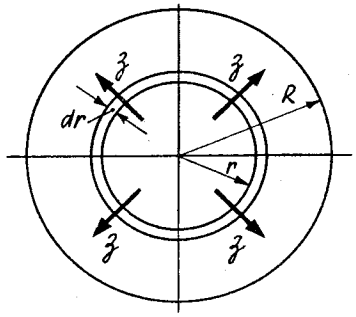


Bild 362
Zur Theorie der Niederdrucksäule

1) namentlich in Edelgasen und Metalldämpfen

die Wand erreichende Träger endgültig verloren geht, kann nunmehr die Trägerbilanz aufgestellt werden.
Wir betrachten ein zylindrisches Entladungsrohr von der Länge ℓ m und dem Radius R und berechnen die Trägerbilanz im differentiellen Ringraum der sehr kleinen Breite dr zwischen den Radien r und r + dr (Bild 362). Ist n die Trägerdichte, wobei wegen der Quasineutralität $n = n^+ = n^-$ gilt, so können wir die Zahl der je Raum- und Zeiteinheit gebildeten Träger gleich $n\zeta$ setzen. Dabei bedeutet ζ die Anzahl der von einem Elektron in der Zeiteinheit bei gegebenem Gasdruck erzeugten Ionenpaare, die wir bereits früher für den Fall Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung berechnet hatten (Bild 336). Insgesamt entstehen also in dem betrachteten Ringraum pro Zeiteinheit

$$\zeta \, ndV = 2\pi \, \zeta \, n \, r \, dr \, \ell \qquad (782)$$

neue Trägerpaare. Diesem Trägergewinn steht der Trägerverlust durch ambipolare Diffusion gegenüber. Die Dichte des radial nach außen gerichteten Diffusionsstromes ist gegeben durch

$$Z = - D_a \frac{dn}{dr}$$

Damit ergibt sich folgende Trägerbilanz:

Ein-Diffusionsstrom: $-D_a 2\pi (r \frac{dn}{dr})_r \ell = -D_a \, 2\pi (r \frac{dn}{dr}) \ell$

Aus-Diffusionsstrom: $-D_a 2\pi (r \frac{dn}{dr})_{r+dr} \ell = -D_a 2\pi \left[r \frac{dn}{dr} + d(r \frac{dn}{dr}) \right] \ell$

Trägerverlust im Ringraum: $-D_a \, 2\pi \, d(r \frac{dn}{dr}) \ell$

Die Gleichsetzung mit (782) führt zu

$$2\pi \, \zeta \, n \, r \, dr = -D_a \, 2\pi \, d(r \frac{dn}{dr}) \quad ,$$

woraus die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} + \frac{\zeta}{D_a} n = 0 \qquad (783)$$

folgt. Die Lösung dieser Gleichung ist die Besselsche Funktion nullter Ordnung J_o vom Argument (reell)

$$x = r \sqrt{\frac{\zeta}{D_a}} \qquad (784)$$

Wir können also für die radiale Verteilung der Trägerdichte schreiben

$$n = n_o \, J_o \left(r\sqrt{\frac{\zeta}{D_a}}\right) , \qquad (785)$$

wobei n_o die Trägerdichte in der Rohrachse (r = 0) bedeutet. $J_o(x)$ hat den in Bild 363 gezeigten Verlauf. Für r=0 werden auch x = 0 und demnach $J_o(x) = 1$. Da negative Werte von n physikalisch sinnlos sind, benutzt man nur den ersten Zweig der Besselschen Funktion, der sich von x = 0 bis x = 2,405 erstreckt. Nehmen wir als zweite Grenzbedingung an, daß die Trägerdichte n an der Rohrwand (r = R) verschwindet, so muß die erste Nullstelle der Besselfunktion an die Rohrwand gelegt werden. Damit wird also

$$(x)_{r=R} = R\sqrt{\frac{\zeta}{D_a}} = 2{,}405 \ldots \qquad (786)$$

Aus dieser Gleichung folgt eine anschauliche und in vielen Fällen brauchbare Formulierung der Trägerbilanz, die auf die mittlere Lebensdauer der Träger zurückführt. Wir bringen hierzu Gl. (786) auf die Form

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{R^2}{(2{,}405)^2 \, D_a} \; [s] \qquad (787)$$

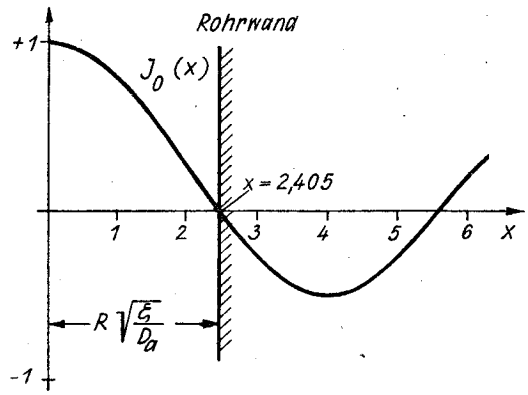


Bild 363
Die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht die im Mittel zwischen zwei Ionisationsakten eines Elektrons verstreichende Zeit, während die rechte Seite mit der Zeit identisch ist, die ein Träger im Mittel braucht, um aus dem Saulenplasma an die Wand zu diffundieren. Die durchgeführte Trägerbilanz fordert somit, daß jedes Elektron während seiner Lebensdauer im Mittel einmal ionisieren, also einen Nachfolger erzeugen muß, um einen stationären Stromfluß zu sichern.

β) Experimentelle Kontrolle der Diffusionstheorie: Da Gl. (787) meßbare oder wenigstens abschätzbare Größen enthält, ist eine experimentelle Kontrolle der obigen Diffusionstheorie möglich. Mit (754) lautet Gl. (787)

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{q\,R^2}{5{,}8\;k b^+\;T^-} \qquad (788)$$

Da ferner ζ dem Druck p (Stoßzahl!) und die Beweglichkeit seinem Kehrwert 1/p proportional sind, setzen wir

$$\zeta = \zeta_o\, p \quad \text{und} \quad b^+ = b_o^+/p$$

Damit wird aus Gl. (788)

$$\zeta_o = \frac{5{,}8k}{q}\, b_o^+\; \frac{T^-}{(Rp)^2} = C_o\, \frac{T^-}{(Rp)^2}\;, \qquad (789)$$

wobei für C_o gesetzt wurde

$$C_o = \frac{5{,}8k}{q}\, b_o^+$$

Tragen wir ζ_o als Funktion der Elektronentemperatur T^- auf, so ergibt Gl. (789) eine durch den Nullpunkt führende Gerade, deren Neigung umgekehrt proportional $(Rp)^2$ ist (Kurve 1 in Bild 364). Für $\zeta_o = f(T^-)$ folgt der früher ermittelte Verlauf (s.Bild 336), den wir hier als Kurve 2 eingezeichnet haben.

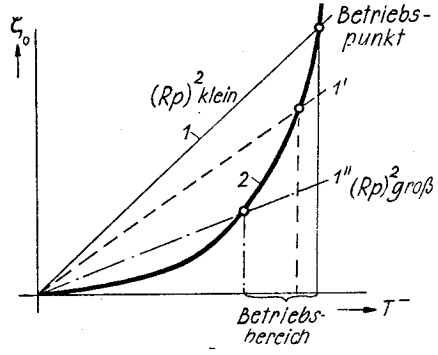


Bild 364
Zur experimentellen Kontrolle der Diffusionstheorie der Niederdrucksäule

Der Schnittpunkt beider Kurven gibt den Betriebspunkt. Dieser verschiebt sich mit zunehmendem R oder p, also mit geringer werdender Neigung der Geraden 1, zu immer kleineren Werten der Elektronentemperatur T^- (vgl. auch Bild 364). Infolge des steilen Anstieges von Kurve 2 ist der T^--Bereich (Betriebsbereich) nur klein. In dieser Weise ist eine experimentelle Prüfung der Diffusionstheorie der Niederdrucksäule möglich. Sie konnte im wesentlichen mit Erfolg durchgeführt werden.

γ) Einfluß der Stromdichte: Nach der oben entwickelten Diffusionstheorie der Niederdrucksäule ist die Elektronentemperatur T^-

stromunabhängig. Da annähernd T^- proportional E ist, sollte das gleiche auch auf die Feldstärke E zutreffen. Entsprechende Messungen führen aber stets zu einer schwach fallenden U(J)-Kennlinie der Niederdrucksäule. Die Deutung des Kennlinienabfalles erfordert eine Erweiterung der Theorie auf die bisher außer acht gelassenen Einflüsse der Stromdichte auf die Trägerbilanz. Es sind dies bei wachsendem Strom die Zunahme der Stufenprozesse sowie ein durch Aufheizung des Gases zunehmender radialer Gasdichteanstieg. Beides begünstigt die Trägerbildung und führt zu einer Senkung von Feldstärke und Elektronentemperatur mit zunehmendem Strom.

δ) Potentialverlauf in der Niederdrucksäule: Mit der ambipolaren Diffusion ist ein elektrisches Feld verbunden, das parallel zum Diffusionsstrom, in unserem Falle also radial nach außen gerichtet ist. Im Sinne der Theorie der ambipolaren Diffusion verzögert es die Diffusion der Elektronen und beschleunigt die der Ionen. Diesem Radialfeld $\mathcal{E}_r$ überlagert sich das axiale Hauptfeld $\mathcal{E}_z$ der Säule (vgl. Bild 365). Das resultierende Feld hat zur Folge, daß die Niveauflächen des Potentials keine Ebenen, sondern nach der Katode zu ausgebauchte Rotationsflächen sind (vgl. Bild 365). Unter der Annahme, daß im gesamten Rohrquerschnitt gleiche Temperatur T^- herrscht, folgt für den radialen Abfall der Elektronendichte wieder die Boltzmann-Verteilung

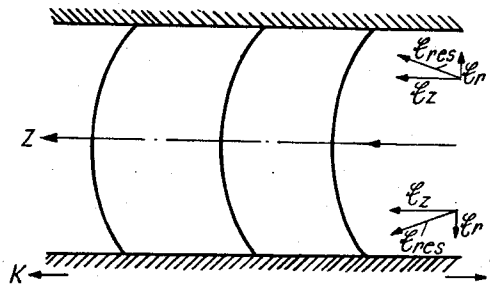


Bild 365
Äquipotentialflächen in der Niederdrucksäule (schematisch im Schnitt)

$$\frac{n(r)}{n_o} = e^{-\frac{eU}{kT^-}}$$

ε) Technische Anwendung der Niederdrucksäule: Hauptanwendung der Niederdrucksäule sind die Leuchtstofflampe, das Glühkatodenventil mit und ohne Gittersteuerung und der Hg-Dampf-Stromrichter. Leuchtstofflampen arbeiten mit Hg-Füllung und einer Elektronen emittierenden Oxydkatode. Der Fülldruck beträgt (als Sättigungsdruck bei

ca. 40°C Betriebstemperatur) $p = 10^{-2}$ Torr. Weitere Richtwerte einer 40-W-Leuchtstofflampe sind: Rohrradius R = 1,8 cm, Stromdichte $\bar{G} \approx 0{,}04$ A/cm^2, Feldstärke $E \approx 0{,}8$ V/cm, Länge $\ell = 120$ cm, Betriebsspannung U = 110 V und Elektronentemperatur $\bar{T} \approx 25000^\circ$K.

Glühkatodenventile besitzen Hg- oder Edelgasfüllung (A, Xe) und meist indirekt geheizte Oxydkatode. Die Glühkatode muß den gesamten Strom emittieren können, da der Beitrag der positiven Ionen vernachlässigbar klein ist. Glühkatodenventile sind rationell bis zu Stromstärken von $J \approx 30$ A. Ihre Brennspannung beträgt etwa 15 V und der Fülldruck $p = 0{,}05 \ldots 0{,}1$ Torr.
Von besonderem technischen Interesse sind Glühkatodenventile mit Gittersteuerung, die auch als Thyratron oder Stromtor bezeichnet werden. Bei diesen Geräten kann der Einschaltmoment durch ein Gitter gesteuert werden. Bei stationär brennender Entladung und negativer Gitterspannung wirkt das Gitter wie eine negative Sonde im Plasma. Es umgibt sich also mit einer positiven Raumladungsschicht (Langmuirschicht) und schirmt auf diese Weise das Gitter gegen das Plasma ab, so daß eine Beeinflussung der Entladung durch das Gitter nicht mehr möglich ist. Wird das Ventil jedoch mit Wechselspannung betrieben, so erlischt beim Nulldurchgang der Spannung die Entladung, und durch Wahl der Gitterspannung kann man dann die Zündung innerhalb der positiven Halbwelle beliebig verzögern.

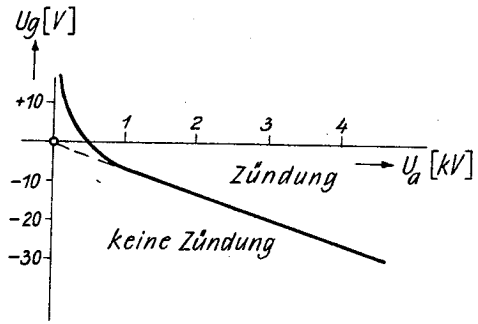


Bild 366
Zündkennlinie eines Thyratrons

Maßgebend hierfür ist die Zündkennlinie des Thyratrons, die etwa verläuft, wie es Bild 366 zeigt. Je höher die Anodenspannung U_a ist, um so niedriger kann die eine Zündung gerade verhindernde Gitterspannung U_g gewählt werden. In der Ebene des Steuergitters herrscht effektiv das Potential

$$U_S = U_g + DU_a ,$$

wenn D den Durchgriff der Anodenspannung durch das Gitter bedeutet.

Die Zündung erfolgt stets dann, wenn U_S ungefähr gleich der Ionisierungsspannung U_i des Füllgases ist. Da meist $U_a \gg U_i = U_S$ ist,

lautet die Zündbedingung angenähert: $U_g = - DU_a$
(Weitere Einzelheiten s.Lehrbriefreihe Stromrichter!)
Der Quecksilberdampf-Stromrichter benutzt als Elektronenlieferant keine Glühkatode, sondern den praktisch unendlich ergiebigen sogenannten "Brennfleck" auf einem Teich flüssigen Quecksilbers. Seine Wirksamkeit wird später noch beschrieben. Der restliche Teil der Entladung ist auch hier wieder von einem Niederdruckplasma ausgefüllt.

b) Die Hochdrucksäule: Bei großen Gasdichten [1] ist das Plasma infolge der hohen Stoßzahl der Elektronen isotherm, es wird also $T^- = T_g = T$ (vgl. auch Bild 359). Der Ionisationsgrad ist damit durch die Eggert-Saha-Formel (720) gegeben. Er fällt, wie auch die Temperatur T, von der Säulenachse aus gesehen radial nach außen ab. Bei hohen Drücken p wird wegen der Invarianz von Rp (vgl.(776)) ein sehr kleiner Radius R der Säule zu erwarten sein. In der Tat schnürt sich der Strom von der Rohrwand unbeeinflußt zu einem Faden zusammen. Eine Rekombination an der Rohrwand kommt somit nicht mehr in Betracht. Vielmehr erfolgt die Trägervernichtung ausschließlich im Gasraum, und zwar im Gleichgewicht mit den trägerbildenden Prozessen.

In 1. Näherung läßt sich der Abfall von Temperatur und Ionisation nach der Randzone hin vernachlässigen. Damit ist dann auch die Leitfähigkeit $\sigma(T)$ des Plasmas innerhalb der Säule konstant, und es gilt für die Stromstärke J der Entladung

$$J = R^2 \pi \sigma(T) E \qquad (790)$$

Energetisch besteht ferner der Zusammenhang

$$EJ = W(R,T) , \qquad (791)$$

wenn

$$W(R,T) = \frac{\text{Leistungsverlust der Abstrahlung}}{\text{Säulenlänge}}$$

bedeutet. Da die Abhängigkeit der Funktion W von R und T grundsätzlich bekannt ist, treten bei vorgegebener Stromstärke J nur noch die drei Unbekannten R, T und E auf. Zu ihrer Ermittlung fehlt aber noch eine 3. Bestimmungsgleichung. Diese folgt aus dem sogenannten Minimumprinzip. Danach sucht sich die Säule aus der

1) Z.B. Lichtbogen in Luft und Hg-Hochdrucklampe

Gesamtheit aller möglichen Zustände denjenigen als stabil heraus, der mit einem Minimum von Leistung, bei vorgegebener Stromstärke J also mit einem Minimum der Feldstärke E, verbunden ist. Die 3. Bestimmungsgleichung hat somit die Form

$$\frac{dE}{dT} = 0 \quad \text{oder auch} \quad \frac{dE}{dR} = 0 \tag{792}$$

Damit ist der Zustand der Säule vollständig und eindeutig bestimmt.
Als Richtwerte für die Temperatur der Hochdrucksäule gelten bei
Lichtbögen in freier Luft zwischen Kohleelektroden: $T = 6000^{\circ}K$
Hochstrom-Lichtbögen: bis $T = 11000^{\circ}K$.
Technische Anwendung findet die Hochdrucksäule hauptsächlich in der Lichttechnik. Beispiele: Bogenlampe in Luft, Beckbogen, Xenon-Hochdrucklampen. Letztere übertreffen noch die Leuchtdichte der Sonne. Die Temperatur beträgt dort bei $p \approx 35$ atm etwa $T = 11000^{\circ}K$. Das ergibt einen Ionisationsgrad nach (720) von rund $x = 0{,}025$.

[78] Die selbständige Entladung

1. Kennzeichnung: Wird der Elektronenstrom zur Aufrechterhaltung einer Entladung unter ständiger Energiezufuhr durch eine Glühkatode geliefert, so spricht man von einer unselbständigen Entladung.
Im Gegensatz dazu spricht man von selbständigen Entladungen dann, wenn die elektronenliefernde Ursache von der Entladung selbst ausgeht. Man bezeichnet diese auf die Katode zurückgreifende und zur Elektronenemission führende Ursache als Rückführung. Hierfür kommen grundsätzlich die nachfolgend genannten Elementarprozesse in Betracht:

1. Die im Gas gebildeten positiven Ionen lösen beim Aufprall auf die Katode Elektronen aus (γ-Effekt).
2. Ein Teil des vom Entladungsraum ausgestrahlten Lichtes gelangt zur Katode und setzt Fotoelektronen in Freiheit (Fotoeffekt).
3. Metastabile Atome diffundieren zur Katode und lösen dort unter Abgabe ihrer Anregungsenergie Elektronen aus.
4. Die mit großer Energie auf die Katode aufprallenden Ionen erwärmen dieselbe so stark, daß sie zur thermischen Elektronenemission befähigt wird.

5. Bei großer Stromdichte erzeugen die positiven Ionen vor der Katode durch ihre Raumladung ein so starkes Feld, daß Feldemission einsetzt.

Faßt man die Ausbeuten all dieser Elementarprozesse in einer Größe Γ zusammen, die zwar auf ein positives Ion bezogen ist, aber auch die anderen Ursachen für Elektronenbefreiung an der Katode mit umfaßt, so können wir die Bedingung für den stationären Stromfluß der Entladung in der Form schreiben:

$$\Gamma\left(e^{\int_0^d \alpha\, dx} - 1\right) = 1 \qquad (793)$$

Hierin ist d der Elektrodenabstand (Schlagweite).

2. Die Glimmentladung

a) Merkmale: Eine sehr wichtige Form der selbständigen Entladung ist die Glimmentladung. Die Rückführung erfolgt bei ihr durch die oben genannten Elementarprozesse 1. bis 3.

Typisch ist zunächst das mit dem bloßen Auge wahrnehmbare Aussehen der Entladung: Es zeigen sich eine Reihe gesetzmäßig aufeinanderfolgender leuchtender Schichten und Dunkelräume[1] (Bild 367):

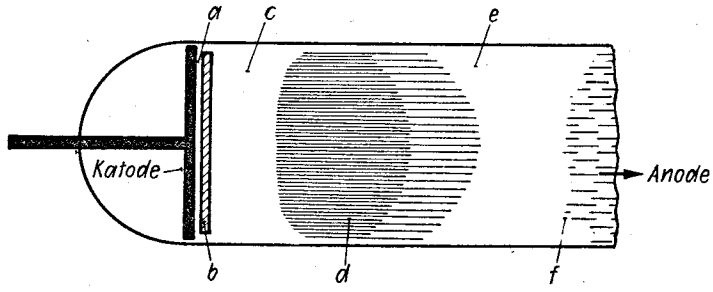


Bild 367
Leucht- und Dunkelschichten vor der Glimmkatode (schematisch)

a) Astonscher Dunkelraum: Eine absolut lichtlose Schicht, unmittelbar auf der Katode aufliegend. Sie ist im allgemeinen sehr dünn und fehlt bei höheren Katodenfällen und in Molekelgasen vollständig.

1) Am reinsten und vollständigsten treten diese Partien in saubereren Edelgasen auf.

b) Erste Katodenschicht: Dünne, schwach leuchtende Lichthaut, diffus nach außen auslaufend.

c) Hittorfscher (Crookesscher) Dunkelraum: Schwach leuchtende Wolke, die wegen des starken Kontrastes mit den benachbarten leuchtenden Schichten als dunkel empfunden wird.

d) Negatives Glimmlicht: Hellste und augenfälligste Lichtpartie des Katodengebietes mit ziemlich scharfer Begrenzung am katodenseitigen Ende (Glimmsaum) und allmählichem Helligkeitsabfall nach der Anode zu.

e) Faradayscher Dunkelraum: Sehr schwach leuchtende, ziemlich weit von der Katode wegragende Partie, die je nach den sonstigen Bedingungen entweder bis zur Anode reicht oder in die positive Säule f) übergeht.

Die aufgezählten Lichtpartien und Dunkelräume sind grundsätzlich auf Unterschiede in der Elektronengeschwindigkeit zurückzuführen. Sie sind eindeutig der Katode zuzuordnen, denn bei einer Verschiebung derselben bewegen sie sich so, als ob sie mit jener starr verbunden wären.

b) Potentialverlauf: Einen tieferen Einblick in den Mechanismus der Glimmentladung gibt die Betrachtung des Potentialverlaufes vor der Katode, wie er beispielsweise aus Sondenmessungen folgt.

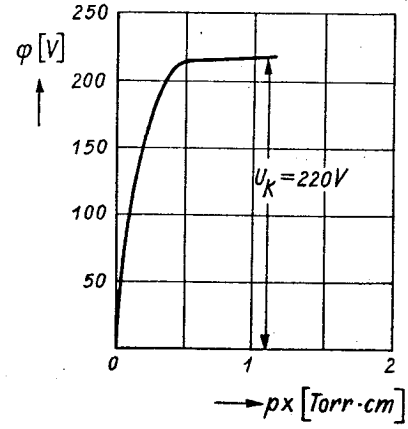


Bild 368 zeigt für eine normale Glimmentladung in Argon den Verlauf des Raumpotentials φ vor einer Ni-Katode, abhängig vom Abstand x. Dabei ist nach dem Ähnlichkeitsgesetz das Produkt px aufgetragen. Die Spannung steigt etwa bis zum negativen Glimmlicht sehr steil an und bleibt

Bild 368
Potentialverlauf vor der Katode (Ni) einer normalen Glimmentladung in Argon

danach praktisch konstant. Der steile Anstieg ist auf positive Raumladungen zurückzuführen. Die Feldstärke fällt dementsprechend von einem Maximalwert an der Katode (in erster Näherung linear) mit zunehmender Entfernung x ab und erreicht im negativen Glimmlicht einen nur wenig von Null verschiedenen Wert.

Für den experimentell gut erfaßbaren Katodenfall (U_k) (Spannungsabfall vor der Katode) gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

Der Katodenfall ist von Strom und Gasdichte unabhängig, solange die Katode nicht vollkommen vom Glimmlicht bedeckt ist (normaler Katodenfall).

Im normalen Fall ist die Stromdichte konstant, d.h., die Ansatzfläche der Entladung auf der Katode ist dem Strom genau proportional (Hehlsches Gesetz).

Sobald die Katode voll bedeckt ist, steigt mit dem Strom auch der Katodenfall und natürlich auch die Stromdichte (anomales Gebiet).

Im normalen Gebiet ist G/p^2 eine Konstante. Das entspricht dem Ähnlichkeitsgesetz, denn bei Stromänderung ändert sich proportional auch die Ansatzfläche, so daß also ähnliche Entladungen vorliegen. Erst bei vollständiger Bedeckung hört die Ähnlichkeit auf, da dann keine Möglichkeit mehr zur Vergrößerung der Ansatzfläche besteht.

Nach dem Ähnlichkeitsgesetz sind alle Linearabmessungen (Länge der Dunkelräume und Leuchtschichten) dem Gasdruck p umgekehrt proportional.

c) Größenordnungen: Je nach der Kombination Metall-Gas beträgt der normale Katodenfall U_n = 70 ... 300 V. Er erhöht sich mit der Austrittsarbeit. Die normale Stromdichte ist ebenfalls vom Metall und Gas abhängig. Man rechnet allgemein mit Werten von G_n/p^2 = 0,02 ... 3,0 A/m^2 $Torr^2$. In einer Kombination Ni-Ne wird beispielsweise G_n/p^2 = 0,04 A/M^2 $Torr^2$. In Edelgasen ist G_n sehr klein. Die normale Fallraumdicke d (das ist der Abstand zwischen Katode und negativem Glimmlicht) liegt bei Werten von dp = 0,004...0,01m Torr. Bei p=1 Torr wird also d = 0,4...1,0 cm.

d) Theorie der Glimmkatode. Jede rationelle Theorie der Glimmkatode muß von der Trägerbilanzgleichung (793) ausgehen, die nicht allein für die Zündung, sondern auch - mit einem durch Raumladungen abgewandelten Feldverlauf - für die stationär brennende Entladung gilt.

e) Technische Anwendung der Glimmentladung

α) Verwendung als Lichtquelle: Ein typischer Vertreter ist die Glimmlampe. Infolge des gedrungenen Aufbaus wird die positive Säule unterdrückt, so daß im wesentlichen nur die Glimmschicht leuchtet. Als Gasfüllung dient vorwiegend Ne oder Ne-He-Gemisch bei ca. 10 Torr Druck. Die Leistung beträgt etwa 2 W, die Lichtstärke 1 Candela, die Farbe ist orange-gelb. Die Elektroden bestehen meist aus Eisen, das gegebenenfalls einen Ba-Überzug hat, wodurch die Austrittsarbeit und damit der Katodenfall herabgesetzt werden. Zur Stabilisierung der Glimmentladung ist stets ein meist im Sokkel der Lampe untergebrachter Widerstand (einige kΩ) erforderlich.

β) Katodenzerstäubung: Die auf die Glimmkatode mit meist hoher Energie aufprallenden positiven Ionen schlagen aus dem Material der Katode Atome oder Atomkomplexe heraus, so daß sich in Katodennähe eine Art Metalldampfatmosphäre bildet. Durch Diffusion gelangt das Katodenmaterial teils zur Katode zurück, teils zu benachbarten Flächen (Glaswand), wo es dann in Form fest haftender Metallhäute „kondensiert". Die praktische Bedeutung der Katodenzerstäubung liegt in 2 Richtungen: Reinigung von Metallen - die dann als Katode fungieren müssen - von oberflächlichen Verunreinigungen und Erzeugung dünner, gleichmäßiger Metallschichten auf Isolatoren (hohe Widerstände, Lichtfilter etc.).

γ) Erzeugung von Kanalstrahlen: An der Rückseite einer in ihrer Längsachse durchbohrten Glimmkatode tritt im stark anomalen Fall ein schwach leuchtender Strahl schneller positiver Ionen aus, den man nach der Art seiner Erzeugung als Kanalstrahl bezeichnet. Die Energie dieser Ionen entspricht der des anomalen Katodenfalles. Kanalstrahlen werden gelegentlich als Ionenquelle für Teilchenbeschleunigung benutzt.

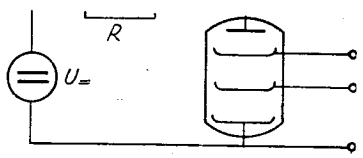


Bild 369
Serienschaltung von Glimmstrecken (Stabilisator-Röhre)

δ) Verwendung als Stabilisator: Die Konstanz des normalen Katodenfalles gibt die Möglichkeit zur Stabilisierung von Spannungen, insbesondere von Gleichspannungen. In praktischen Ausführungen werden oft mehrere Glimmstrecken innerhalb einer Röhre in Serie geschaltet

(vgl. Bild 369), so daß verschiedene Teilspannungen zur Verfügung stehen. Die positive Säule wird in derartigen Anordnungen infolge der geringen Elektrodenabstände unterdrückt.

ε) Erzeugung von Kippschwingungen: Da die Ionisation vor der Katode durch Raumladungen begünstigt wird, ist die Brennspannung stets niedriger als die Zündspannung. Die Entladungsspannung schwankt daher zwischen Zünden und Löschen in einem durch die Zeitkonstante $\tau = C \cdot R$ des Entladekreises (Bild 370a) vorgeschriebenen Rhythmus, wobei eine für Kippschwingungen charakteristische Sägezahnkurve der Elektrodenspannung entsteht. Kippschwingungen dieser Art spielen als Zeitablenkung für Braunsche Röhren eine große Rolle.

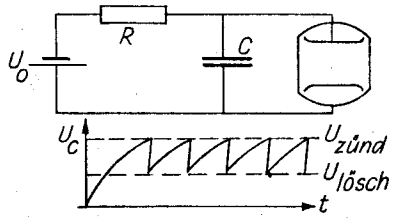


Bild 370a
Schema zur Erzeugung von Kippschwingungen

ζ) Schaltröhren: Bei Schaltröhren wird die Glimmentladung zur Steuerung oder Ausführung von Schalthandlungen ausgenutzt. Schon in der einfachsten Form als Diode stellt die Glimmentladung durch ihren Wechsel zwischen Zünd- und Brennspannung einen vorteilhaften Schalter dar. Weitaus günstiger ist die Triode, da durch den verhältnismäßig geringen Aufwand für die Steuerelektrode die Steuerleistungen erheblich verkleinert werden und eine sehr starke Entkopplung zwischen Steuer- und Arbeitskreis möglich ist. Das Grundprinzip einer Schaltung mit Schalttriode zeigt Bild 370b. Die Zündung erfolgt dort durch einen positiven Impuls. Der Anodenwiderstand R_a begrenzt nach der Zündung der Hauptentladung den Strom auf einen vorgeschriebenen Wert.

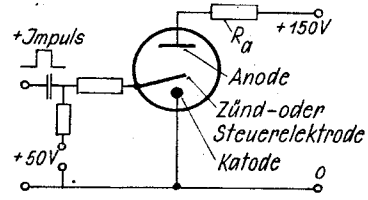


Bild 370b
Grundschaltung zur Zündung einer Glimmentladungsröhre durch einen positiven Impuls

Glimmdioden finden bei der Zündung von Leuchtröhren als sogenannte "Starter" Verwendung. Sie sind in geeigneten Schaltungen auch für die verschiedenartigsten Relaiszwecke zu gebrauchen. Dasselbe gilt auch für die Glimmtrioden, bei denen die Entkopplung beider Kreise im allgemeinen eine Vereinfachung der Schaltung erlaubt. Man verwendet Glimmtrioden als Zählröhren zur Zählung von Impulsen, in Digital-Rechenmaschinen, als Verbindungswähler in Fernsprechanlagen usw.

3. Die Koronaentladung

a) Merkmale: Die Koronaentladung entsteht bei verhältnismäßig großen Drücken (z.B. 1 atm), wenn das Feld der Entladungsstrecke infolge eines kleinen Krümmungshalbmessers einer oder beider Elektroden sehr inhomogen ist. Die Ionisation und Lichtemission erfolgen lediglich in einer dünnen Glimmzone an der Elektrode mit kleinem Krümmungshalbmesser (Drähte, Spitzen). Diese Glimmzone nennt man Koronahaut. Außerhalb dieser Zone ist das elektrische Feld zu schwach, als daß Ionisation erfolgen kann. In elektronegativen Gasen (Luft!) lagern sich alle Elektronen sofort an Molekeln an, und der Stromtransport besteht aus der Bewegung positiver oder negativer Ionen. Man nennt dieses Gebiet, in dem also keine Neuerzeugung von Trägern erfolgt, den Korona-Rumpf oder auch die Transportzone.

Ist nur eine Elektrode starker Krümmung vorhanden, so strömen durch die Transportzone Träger nur eines Vorzeichens, nämlich des der "Sprühelektrode", so daß dieser Strom raumladungsbeschwert erfolgt (Unipolarer Ionenstrom).

Die Stromstärke der Koronaentladung hängt von der Elektrodenspannung, von der Form der Elektroden und ihrem gegenseitigen Abstand sowie von der Natur und Dichte des Gases ab. Die Koronaentladung benötigt zu ihrem Unterhalt keine fremde Ionisationsquelle. Sie gehört also zur Gruppe der selbständigen Entladungen.

b) Spannungscharakteristik: Da die Elektrodenspannung der Koronaentladung in erster Linie vom Stromdurchgang durch die Transportzone bestimmt wird, muß zur Ermittlung der Strom-Spannungs-Charakteristik die Poissonsche Gleichung gelöst werden, indem die Raumladungsdichte ϱ durch die Stromstärke J und die Beweglichkeit b der Ionen ausgedrückt wird.

Für zwei koaxiale Zylinder kann dieses Problem leicht angenähert gelöst werden.

Die Rechnung führt auf folgenden Ausdruck für die Korona-Kennlinie:

$$J(U) = \frac{2\,\pi\,\varepsilon\,b}{R_a^2}\,(U - U_o)^2 = C\,b\,(U - U_o)^2 \qquad (794)$$

Hierin ist b die Beweglichkeit der in Betracht kommenden Ionensorte, also z.B. der positiven Ionen bei positivem Draht, und R_a

ist der Radius des Außenzylinders. U_o ist der über der Koronahaut liegende Spannungsabfall.
Der Strom J steigt also im gesamten Bereich monoton mit der Spannung U an (vgl. Bild 371). Für Spannungswerte dicht oberhalb von U_o hat die Kennlinie den gestrichelt eingezeichneten Verlauf. Das rührt daher, daß die Raumladung ϱ bei sehr kleinen Stromstärken J nicht mehr in der Lage ist, ein Feld mit günstigen Ionisationsbedingungen aufzubauen. Dadurch erhöht sich die über der Korona abfallende Spannung U_o auf einen Wert U_z, der als Zündspannung der Koronaentladung bezeichnet wird.

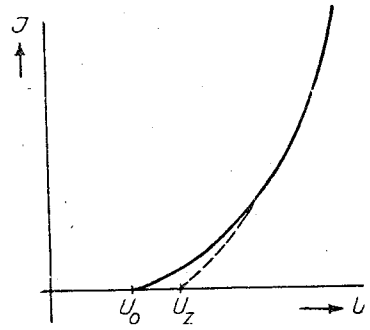


Bild 371
J(U)-Kennlinie der Koronaentladung zwischen zylindersymmetrischen Elektroden

Eine von Townsend angegebene Kennliniendarstellung

$$J(U) = C\, b\, U\, (U - U_z)$$

trägt diesen Verhältnissen mehr Rechnung. Sie geht bei hohen Spannungen in die oben für die Transportzone abgeleitete Darstellung (794) über.

c) Die Koronaentladung in der Technik: Die Koronaentladung führt teils zu unerwünschten Begleiterscheinungen, ermöglicht anderseits aber auch wertvolle technische Nutzanwendungen.
Unerwünscht sind beispielsweise die durch Koronaentladungen verursachten Verluste an Hochspannungsleitungen und -geräten: Die positiven und negativen Ionen pendeln in der Transportzone im Takte der an den Elektroden (Leiterseile) liegenden Wechselspannung hin und her. Bei Frequenzen von 50 Hz wird die Amplitude dieser Pendelbewegung etwa 0,5 ... 1 m groß. Die Ionenbeweglichkeit liegt etwa bei $b = 2 \cdot 10^{-4}\ m^2/Vs$. Bei einer mittleren Feldstärke von $E = 300$ kV/m in der Umgebung des Seiles berechnet sich damit eine Driftgeschwindigkeit

$$u = b\, E = 2 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^2}{Vs}\ 3 \cdot 10^5\ \frac{V}{m} = 60\ \frac{m}{s}$$

Die von den Ionen an die Luftmolekeln als Wärme abgegebene Reibungsenergie (Dämpfung) wird der Leitung entzogen. Die so verursachten Verluste bezeichnet man als Koronaverluste.

Eine nützliche Anwendung findet die Koronaentladung in der elektrischen Gasreinigung, also bei den Elektrofiltern: Durch ein koaxiales Rohrsystem (Durchmesser der Innenelektrode 1...2 mm, Durchmesser der umhüllenden Außenelektrode 300 mm) strömt staubhaltige Luft. Zwischen Draht und Zylinder wird bei ca. 50 kV eine negative Koronaentladung unterhalten. Die Staubteilchen wirken dann als Anlagerungskerne für die negativen Ionen der Transportzone. Sie laden sich also negativ auf und wandern im elektrischen Felde nach außen an die Rohrwand ab. Dort werden sie in Form einer meist recht fest anhaftenden Schicht abgeschieden [1]. Von Zeit zu Zeit muß die Rohrwand gereinigt werden, da sonst die Schicht zu dick wird und so dem Strom einen zu großen Widerstand entgegensetzt. Das beschriebene Verfahren gestattet die Abscheidung fester und flüssiger Aerosole. Eine Trennung von Gasgemischen erfolgt natürlich nicht. Anwendung: Rauchgas von Kraftwerken, Braunkohlenstaub in der Briketterzeugung, Metallstaub in Hüttenbetrieben u.a.

Außer den beschriebenen Rohrfiltern werden heute meist Plattenfilter gebaut. Das sind flache Kästen, in deren Mittelebene sich ein Gitter von Sprühdrähten befindet. Die Wirkungsweise ist die gleiche wie oben beschrieben. Grundsätzlich wäre auch positive Polarität des Sprühdrahtes möglich. Jedoch schlägt die positive Korona leichter in den totalen Durchbruch (Funkenentladung) um.

4. Die Bogenentladung

a) Merkmale: Bei weiterer Steigerung des Stromes geht die Glimmentladung in die Lichtbogenentladung über. Da die Stromstärke der Lichtbogenentladung nach oben hin praktisch unbegrenzt ist, beschließt diese Entladungsform die Reihe der selbständigen Gasentladungen. Charakteristische Merkmale des Lichtbogens sind in erster Linie

hohe Katodentemperatur, geringe Brennspannung und kleiner Brennfleck

Mit steigender Stromstärke wird die Katode sehr stark thermisch belastet. Der dadurch bedingte Anstieg der Katodentemperatur führt zu einer zusätzlichen Elektronenemission, die neben anderen Erscheinungen eine wesentliche Verbesserung der gesamten Rückführung Γ mit sich bringt. Die Temperatur der Katode oder Anode steigt oft soweit an, daß eine mehr oder weniger heftige Verdamp-

1) Die Haftung wird durch elektrostatische Kräfte noch gesteigert.

fung des Elektrodenmaterials eintritt. Beispiele hierfür sind der Kohledampfstrahl im Hochstromlichtbogen und der Hg-Dampfstrahl im Hg-Gleichrichter. Charakteristisch für alle Bogenentladungen ist die starke Zusammenschnürung der katodischen Ansatzfläche zu einem sehr kleinen Brennfleck, wodurch außerordentlich hohe Stromdichten entstehen. Für diese Stromdichten an der Katode gelten etwa folgende Extremwerte:

Kohlelichtbogen in Luft:	$G_k = 500\ A/cm^2$
Flüssige Hg-Katode (Hg-Gleichrichter):	$G_k = 10^6 \ldots 10^7\ A/cm^2$

Die Brennspannung U_B ergibt sich ganz allgemein aus der Summe dreier Spannungsteile:

$$U_B = \text{Katodenfall } U_k + \text{Säulenabfall } E \cdot \ell + (\text{Anodenfall } U_A)\ ^{1)}$$

Der Spannungsabfall in der Säule ist ihrer Länge (ℓ) proportional.

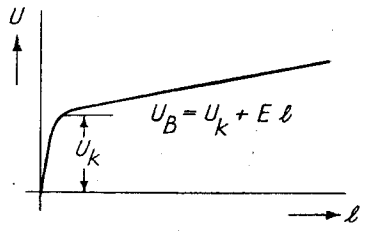


Bild 372
Verlauf des Potentials in einer Lichtbogenentladung

Der Verlauf der Säulenspannung ist in Bild 372 dargestellt. Durch Verändern des Elektrodenabstandes läßt sich der Katodenfall allein erfassen. Hierbei ergeben sich Spannungen um 10 V. Dies ist etwa die Größenordnung der Ionisierungsspannung. Eine genaue Erfassung des Anodenfalles ist nur sehr schwer möglich.

b) Theorien der Lichtbogenkatode: Die zur Aufrechterhaltung des Lichtbogens maßgebende Elektronenemission an der Katode wird im wesentlichen durch hohe Temperatur (thermische Glühemission) und hohe Feldstärke (Feldemission) verursacht.
Die thermische Emission wird dabei noch durch den Schottky-Effekt unterstützt. Bei Berücksichtigung dieses Effektes (Gl. 601) wird die Dichte des thermischen Emissionsstromes (Gl. 597)

$$G_{th} = A\,T^2\,e^{-\frac{q\left(U_a - \sqrt{\frac{qE}{4\pi\varepsilon}}\right)}{kT}} \qquad (795)$$

1) Der Anodenfall ist meist zu vernachlässigen.

wobei $A \approx 120\ A/cm^2\ grad^2$ zu setzen ist.
Die Dichte des Feldemissionsstromes ist durch Gl. (603a) gegeben. Je nach dem Katodenmaterial können sowohl beide Emissionsarten (allgemeiner Fall) als auch jede für sich allein (Grenzfälle) wirksam sein.
Ein typisches Beispiel der thermischen Emission ist der Kohlelichtbogen in Luft. Die Temperatur der Kohle-Katode beträgt etwa 4000^oK bei 760 Torr. Sie gibt bereits ohne Unterstützung durch den Schottky-Effekt eine reine Glühelektronenemission, die die beobachteten Stromdichten von etwa $500\ A/cm^2$ rechtfertigt.

Die Temperatur des Brennfleckes eines Hg-Lichtbogens ist dagegen mit ca. 2000^oK viel zu gering, um die beobachteten Stromdichten von über $10^6\ A/cm^2$ durch thermische Elektronenemission deuten zu können. Vielmehr muß in diesem Falle mit einer reinen Feldemission an der Katode gerechnet werden.
Grundsätzlich kann eine Glühelektronenemission bei allen schwer verdampfbaren Katodenstoffen (wie z.B. Kohle- und Wolframkatoden) angenommen werden, während sie bei leicht verdampfbaren Metallen (wie z.B. Zink, Silber und insbesondere Quecksilber) quantitativ nicht mehr befriedigt.
Während der Mechanismus der thermischen Elektronenemission an schwer verdampfbaren Katoden verständlich ist, taucht bei der Feldemission die Frage nach dem Zustandekommen der erforderlichen hohen Feldstärken (einige 10^9 V/m) auf.
Unter der durchaus berechtigten Annahme, daß sich vor der Katode eine vorwiegend positive Raumladung aufhält, läßt sich das Feld an der Katode mit Hilfe der Poissonschen Gleichung grundsätzlich berechnen. Diese lautet für eine ebene Katodenoberfläche

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o}$$

Es läßt sich zeigen, daß auf diese Weise so hohe Feldstärken an der Katodenoberfläche zustande kommen, daß man mit einer merklichen Feldemission von Elektronen aus der Katode rechnen kann.

Außer den beiden für die Elektronenemission herangezogenen Ursachen wird in letzter Zeit auch noch ein dritter möglicher Mechanismus der Bogenkatode diskutiert. Danach wird nach Slepian

dicht vor dem Katodenfleck eine sehr hoch temperierte dichte Gas- bzw. Dampfwolke angenommen, in der ein hoher, thermisch erzeugter Ionisationsgrad herrscht. Die quantitative Durchführung dieses Gedankens ist ohne gröberen Widerspruch mit den Beobachtungstatsachen möglich.

c) Technische Anwendung der Bogenentladung

α) Hg-Dampfgleichrichter: Die Katode besteht aus flüssigem Hg (Brennfleck), die Anoden aus Grafit. Letztere sind in Glasarmen oder Eisen-Schutzrohren untergebracht, um gegen Hg-Anprall geschützt zu sein. Dadurch entstehende Rückzündungen [1] werden auf diese Weise weitestgehend vermieden.

Einer Katode werden entsprechend der Phasenzahl mehrere Anoden gegenübergestellt, so daß sich Sternschaltungen mit 2, 3, 6 oder 12 Phasen ergeben können. Der Brennfleck wird durch eine dauernde Nebenentladung (Erregerstrom) aufrechterhalten.

Die Brennspannung liegt bei etwa 20 V. Neben den Mehr-Anoden-Gefäßen werden - neuerdings sogar bevorzugt - Ein-Anoden-Gefäße verwendet. Für gleichzurichtende Spannungen in der Größe von 20 V ... 80 V arbeitet deshalb auch ein Hg-Dampfgleichrichter unrationell.

Die Stromstärken sind nach oben unbegrenzt. So werden z.B. für Stadtbahnbetriebe Einheiten bis zu 8000 A verwendet.

Auch für Hg-Dampfgleichrichter ist grundsätzlich eine Gittersteuerung möglich. Die Gitter müssen dann im Anodenschutzraum der zu steuernden Anode angebracht werden.

β) Bogenlampen: Typische Vertreter sind der Kohle-Lichtbogen in Luft und Hochdrucklampen mit Hg- oder Xenon-Füllung.

Beim Kohle-Lichtbogen muß infolge des Abbrandes der Kohlen der Elektrodenabstand, gemessen an der Brennspannung (ca. 70 V), durch einen als Regelkreis arbeitenden Nachschubmechanismus konstant gehalten werden. Eine erhebliche Steigerung der Leuchtdichte ergibt sich bei Verwendung von sogenannten Beckkohlen (Einlage aus Cer-Verbindungen).

Die Hg-Hochdrucklampe (Hg-Elektroden in Hg-Dampf) findet als "künstliche Höhensonne" Verwendung. Sie verhält sich ähnlich wie ein Hg-Gleichrichter, arbeitet aber bei wesentlich höheren Drücken, wodurch die Lichtausbeute beträchtlich vergrößert wird.

1) Bei einer Rückzündung wirkt die Anode kurzzeitig als Katode.

Es liegt also ein Hochdruck-Plasma mit dem dafür typischen Temperaturgleichgewicht vor. Die Gesamtspannung beträgt rund 80 V und der Strom einige Ampere.
Bei Xenon-Hochdrucklampen wird der Einfülldruck bis auf 50 atm erhöht. Die Elektroden bestehen aus Wolfram. Zur Verringerung der Austrittsarbeit sind diese häufig mit einem Thoriumzusatz versehen. Es handelt sich hier ebenfalls wieder um einen rein thermischen Bogen mit sehr großer Leistungsdichte und daher auch Leuchtdichte (bis zu 10^6 sb). (Höchstdrucklampe)
γ) Lichtbogen-Schweißung: Hierbei wird die hohe Konzentration von Energie und Temperatur ausgenutzt. Werkstück und Schweißdraht dienen beide als Elektroden.
δ) Plasma-Brenner: Das sehr heiße (bis 15000°K) Plasma eines Lichtbogens zwischen Wolframelektroden wird durch einen intensiven Gasstrom (H_2,A oder N_2) aus dem Bogenpfad heraus- und auf das zu schweißende oder schneidende Werkstück geblasen.
ε) Lichtbogen-Öfen: Hier werden sehr große Leistungen für metallurgische Zwecke umgesetzt. Am geläufigsten ist die dreiphasige Ausführung mit drei etwa 20 cm dicken Kohle- bzw. Grafitstäben als Elektroden.
ζ) Schaltbogen: Bei der Abschaltung von großen Strömen - insbesondere von Gleichströmen - bildet sich zwischen den mechanisch gelösten Schaltkontakten ein Lichtbogen, dessen Löschung oft schwer ist, da das Hochdruckplasma unterbrochen werden muß.
Durch Beblasung, Ölverdampfung oder Unterteilen und Bewegen des Bogens zwischen Kupferscheiben kann gegebenenfalls der Säule soviel Energie entzogen werden, daß die Entladung nicht mehr stationär weiterbrennt. Bei großen Leistungen erfordern derartige Maßnahmen einen beträchtlichen Aufwand.
5. Die Zündung der selbständigen Entladung: Die bisher besprochene stationär brennende Entladung wird durch die Zündung eingeleitet, das ist der Übergang vom vollkommen isolierenden zum leitenden Zustand einer Gasentladungsstrecke. Meist wird eine Zündung durch das Anlegen von hohen Spannungen an die Elektroden erreicht. Als Zündbedingung gilt (793), also die Bilanz der Trägererzeugung, wobei der Feldverlauf E(x) und damit auch $\alpha(x)$ für das raumladungsfreie Zündfeld zu berechnen ist. Es ist also

$$\Gamma(e^{\int_0^d \alpha dx} - 1) = 1$$

und für homogene Zündfelder (wie z.B. Plattenfunkenstrecke)

$$\Gamma(e^{\alpha x} - 1) = 1$$

Die Zündung der selbständigen Entladung kommt dadurch zustande, daß ein an der Katode beispielsweise durch Fotoeffekt ausgelöstes Elektron auf seinem Wege zur Anode im Gas eine Trägerlawine bildet (Townsend-Entladung). Bei genügend großer Rückführung Γ kann sich daraus dann die selbständige Entladung entwickeln.

Bei kleinen Stromstärken (vernachlässigbare Raumladungen) besteht die Entladung aus einer Reihe von nebeneinander wirkenden Ionisierungsspielen, die sich gegenseitig nicht beeinflussen.
Mit wachsender Stromstärke dagegen verzerren die Raumladungen das elektrische Feld an den Elektroden mehr und mehr, so daß schließlich eine gegenseitige Abhängigkeit oder Kopplung der einzelnen Ionisierungsspiele zustandekommt.
Ein anfangs homogenes Feld wird durch diese Verzerrungen inhomogen. Die Folge davon ist, wie sich zeigen läßt, eine Vergrößerung des Verstärkungsfaktors

$$V = e^{\int_0^d \alpha dx}$$

Ohne die Bedingung für stationär brennende Entladung zu verletzen, kann deshalb die zur Aufrechterhaltung der selbständigen Entladung erforderliche Elektrodenspannung entsprechend verringert werden. Der größtmögliche Verstärkungsfaktor V ist mit dem Eintreten der Glimmentladung erreicht, sofern nicht Erwärmung und Verdampfung der Katode eine Lichtbogenentladung einleiten. Ist das Feld der Elektrodenform entsprechend bereits von Anfang an inhomogen, so wirken die Raumladungen dieser Inhomogenität entgegen und der Verstärkungsfaktor V wird vermindert. Ein treffendes Beispiel hierfür sind die Elektrodenanordnungen Spitze-Platte und Draht-Zylinder: Eine Ionisierung erfolgt im wesentlichen nur in unmittelbarer Umgebung der Spitze oder des Drahtes. Von dieser

(negativen oder positiven) Elektrode werden die entgegengesetzt geladenen Ionen schnell abgezogen. Es bleibt eine gleichnamige Raumladung in der Entladungsstrecke zurück, die das Feld an der Spitze (Draht) schwächt und das Feld an der Platte (Zylinder) verstärkt. Die Folge davon ist eine Abnahme des Verstärkungsfaktors und unter Umständen sogar ein Aussetzen der Entladung. Da allerdings nach dem Absaugen der Ionen wieder Raumladungsfreiheit besteht, die ursprünglichen Zündbedingungen also wieder hergestellt sind, kann die Entladungsstrecke erneut zünden. Der Prozeß wird sich also periodisch wiederholen. Die dabei auftretenden Entladungsstöße werden als Trichel-Impulse bezeichnet und sind tatsächlich beobachtet worden.

Eine praktische Anwendung findet der beschriebene Effekt in den Geiger-Müller-Zählern und Zählrohren. Die Spannung zwischen den Elektroden ist dort so eingestellt, daß nur dann eine Zündung erfolgt, wenn primär (etwa durch radioaktive Strahlung) eine bestimmte Ionisation erzeugt wird. Die hierdurch verursachte Entladung reißt jedoch sofort wieder ab, und der Zähler kann auf ein neues Strahlungsquantum reagieren. Besonders günstige Verhältnisse ergeben sich, wenn Spitze oder Draht positive Polarität aufweisen. Die Entladungsröhre ist zumeist mit Wasserstoff und Alkoholdampf gefüllt. Der Fülldruck beträgt etwa $p = 100$ Torr. Die Elektrodenspannung liegt bei $U = 1000$ V und wird durch Stabilisatoren konstant gehalten.

6. Die vollständige Charakteristik der selbständigen Entladung

Die vollständige Kennlinie der Gasentladung nach Bild 373 gibt einen Überblick über die Entwicklung der selbständigen Entladung im Sinne zunehmender Stromstärke. Von besonderer Bedeutung ist dabei, daß sich die fallenden Kennlinienteile nur durch einen genügend großen Vorschaltwiderstand stabilisieren lassen, weil andernfalls der Strom bis zum Ende der fallenden Kennlinie anwächst.

> Alle (selbständigen) Gasentladungen müssen daher immer mit einem Vorschaltwiderstand betrieben werden.

Bringt man die Widerstandsgerade $U = U_0 - JR$ mit dem fallenden Teil der Kennlinie zum Schnitt, so ergibt sich der stabile Arbeitspunkt B (vergleiche Bild 374). Der Schnittpunkt A dagegen charakterisiert einen instabilen Brennzustand. Bei A verursacht

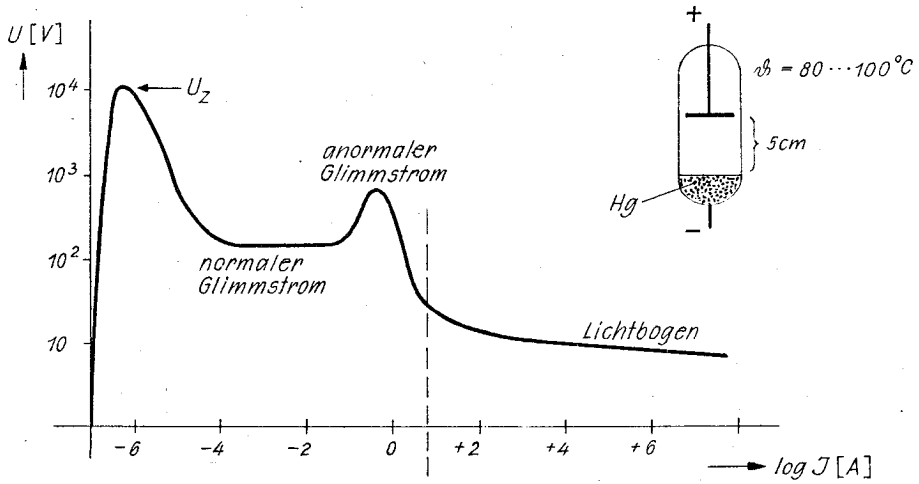


Bild 373
Die vollständige Kennlinie der Gasentladung
(Schematisch für den oben skizzierten Hg-Gleichrichter)

eine geringe Stromerhöhung ein Absinken der Brennspannung. Solange diese Absenkung größer ist als der zusätzliche Spannungsabfall am Widerstand R, kommt eine weitere Stromsteigerung zustande, so daß der Arbeitspunkt auf der Kennlinie U(J) immer mehr nach rechts auf den Punkt B zurückt.

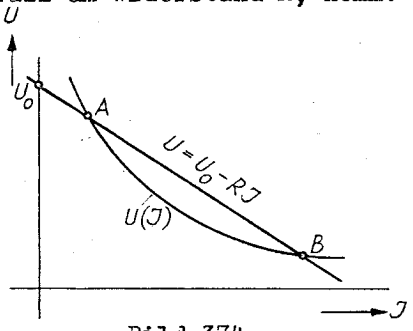


Bild 374
Kennlinie U(J) und Widerstandsgerade $U = U_o - R\,J$

7. Grundsätzliches über Funkenentladungen: Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Entladungstypen ist die Funkenentladung eine intermittierende Entladung, auch dann, wenn eine Gleichstromquelle benutzt wird. Sie besteht aus einem Hochdruckplasma-Schlauch, der sich kurzzeitig auf sehr hohe Temperatur erhitzt und dabei eine große Leitfähigkeit gewinnt, die die angeschlossenen Kapazitäten in kurzer Zeit vollständig entlädt.

Ist die Stromquelle nicht ergiebig genug, so wird die Entladung nach dem kurzen Stromimpuls wieder unterbrochen, und durch Rekombination verschwinden die Ionen, der Kanal wird wieder zu einem Isolator. Die Spannung zwischen den Elektroden steigt nun wieder bis auf den ursprünglichen Wert an, und der Funkendurchbruch wiederholt sich unter Bildung eines neuen Funkenkanals (Relaxations- oder Kippschwingungen). Die Zeit für den Spannungsanstieg ist um so größer, je größer die Kapazität der Funkenstrecke ist. Eine Kapazität parallel zur Funkenstrecke verringert deshalb die Funkenfolge. Gleichzeitig erhöht sich dabei aber auch die Intensität des Funkens.(Vgl.dazu die Glimmentladung als Generator für Kippschwingungen, S. 676!)

Die Strahlung des Funkenkanals und Berechnungen der im Kanal freiwerdenden Energie zeigen, daß sehr hohe Gastemperaturen (bis zu einigen 10^4 °C) auftreten, die zur thermischen Ionisierung ausreichen. Der Druck im Funkenkanal kann ebenfalls sehr hohe Werte erreichen. Die schnelle Bildung von Hochdruckgebieten und ihr Ausgleich im Gas sind die Ursache für Schallaussendung, die die Funkenentladung begleitet. Diese Effekte werden vom Ohr als das für die Funkenentladung charakteristische Knistern bzw. bei den oben beschriebenen Kippschwingungen als Prasseln empfunden. Beim Blitz erscheint dieser Effekt als Donner.

Übungsaufgaben (4. und 5. Kapitel)

---

1. Auf der Sonnenoberfläche herrscht eine Temperatur von 6100°K. Wie groß ist der Ionisierungsgrad x (nach der Saha-Gleichung) in einer dort befindlichen Heliumwolke, wenn der Druck 2,5 atm beträgt?
2. Eine Photozelle soll mit Argon (A = 13,6 $cm^{-1}Torr^{-1}$, B = 235 V/cm Torr) mit optimalem Druck gefüllt werden. Wie groß sind der Fülldruck und die Verstärkung
   a) im homogenen Feld (Plattenabstand d = 2 cm, Elektrodenspannung U = 150 V),
   b) im Zylinderfeld (R_1 = 3,0 cm, R_2 = 0,15 cm, U = 120 V)?

3. Stromtor-Steuerung
Ein Ofen ($R = 35\ \Omega$) soll durch ein Thyratron einphasig gesteuert werden, Netzspannung $U_0 = 220$ V, Brennspannung des Thyratrons $U_b = 16$ V. Wie groß ist bei den Zündwinkeln $\alpha = 0^\circ$ und 60°
a) der Mittelwert des Stromes,
b) der Effektivwert,
c) die Ofenleistung,
d) die Verlustleistung des Thyratrons,
e) der Wirkungsgrad?

4. Korona an Freileitungen
Eine einphasige Freileitung (Drahtdurchmesser $2R = 0{,}8$ cm, Korona-Einsatz-Feldstärke $E_z = 42$ kV/cm) wird mit einer 50-Hz-Wechselspannung betrieben, so daß der Scheitelwert der Feldstärke am Draht $E_m = 48$ kV/cm beträgt. Wie weit entfernen sich maximal negative Ionen ($b_- = 2{,}04\ \mathrm{cm^2/Vs}$) vom Draht?

5. Wie groß ist die Zündspannung U_0 zwischen Draht (Radius $R_i = 0{,}5$ cm) und koaxialem Zylinder ($R_a = 20$ cm), wenn der Zwischenraum mit Argon ($A = 12{,}6\ \mathrm{cm^{-1}Torr^{-1}}$, $B = 235$ V/cm Torr) vom Gasdruck $p = 50$ Torr angefüllt und $\gamma = 0{,}04$ gesetzt wird?

6. Kapitel: Stromleitung in Elektrolyten

[79] Experimentelle Tatsachen. Für den Stromtransport in Elektrolyten gelten

1. das Ohmsche Gesetz,
2. das Faradaysche Gesetz.

Bei der Anwendung des Ohmschen Gesetzes ist zu beachten, daß Elektrolyte durchweg negative Temperaturkoeffizienten aufweisen.

Das Faradaysche Gesetz sagt aus, daß zur Abscheidung des K-Äquivalentes [1] eines jeden Stoffes immer die gleiche Elektrizitätsmenge

1) Das sind soviel kg, wie das Molekulargewicht eines Stoffes, dividiert durch seine Wertigkeit (w), angibt.

$$Q_F = 9{,}65 \cdot 10^7 \text{ As}$$

erforderlich ist. Da ein K-Mol eines einwertigen Stoffes (z.B. Silber) stets die gleiche Zahl

$$N_L = 6{,}026 \cdot 10^{26}$$

Atome enthält, wird bei der Elektrolyse einwertiger Substanzen je Atom stets die der Elementarladung entsprechende Elektrizitätsmenge

$$Q = \frac{9{,}65 \cdot 10^7 \text{ As}}{6{,}026 \cdot 10^{26}} = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ As} = q$$

transportiert.

[80] Die Dissoziationstheorie nach Arrhenius

1. Dissoziationsgrad und Leitvermögen: Nach Arrhenius entstehen schon beim Lösen der Stoffe elektrisch geladene Teilchen (Ionen). Ein typisches Beispiel dafür ist die elektrolytische Dissoziation

$$NaCl \rightleftharpoons Na^+ + Cl^-$$

Im allgemeinen dissoziiert nur ein Bruchteil aller gelösten Moleküle. Man nennt

$$\alpha = \frac{\text{Zahl der Ionenpaare } n}{\text{Zahl der ursprünglich vorhandenen Moleküle } n_0} \qquad (796)$$

den Dissoziationsgrad (Definition). Er wächst mit abnehmender Dichte bzw. Konzentration c der Lösung und nähert sich für $c \longrightarrow 0$ dem Wert 1. Mit der Temperatur steigt α sehr rasch an. Setzen wir für die Dichte des aus zwei entgegengesetzt geladenen Teilen bestehenden Konvektionsstromes

$$G = \sum q_i \, n_i \, u_i = w \, q \, (n^+ u^+ + n^- u^-) \, ,$$

wobei w die Wertigkeit des gelösten Stoffes bedeutet, so wird bei Berücksichtigung von $n^+ = n^- = n$ und $u = bE$

$$G = w \, q \, n \, (u^+ + u^-) = w \, q \, n \, (b^+ + b^-) \, E$$

b^+ und b^- sind die Ionenbeweglichkeiten (s.S. 632).

Da ferner

$$G = \varkappa E$$

gilt, ergibt sich hieraus für das Leitvermögen $\varkappa$ der Ausdruck

$$\varkappa = w \, q \, n \, (b^+ + b^-) \qquad (797)$$

Infolge der konstanten Beweglichkeiten b^+ und b^- sowie der konstanten Ionendichte n folgt daraus auch sofort die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes. (Temperaturkonstanz vorausgesetzt!)

Grundsätzlich liefert die Messung von $\varkappa$ nur die Summe und nicht die Einzelwerte der Beweglichkeiten. Letztere kann man erhalten, wenn man zusätzlich die Konzentrationsänderungen an den Elektroden mißt. Diese liefert Werte für das Beweglichkeitsverhältnis b^+/b^-, womit dann b^+ und b^- selber bestimmt werden können.

Die b-Werte aller Ionensorten liegen durchweg in der gleichen Größenordnung (etwa $6 \cdot 10^{-4} \frac{cm^2}{Vs}$). Ausnahmen bilden lediglich H^+- und OH^--Ionen. Dort ergeben sich mit

$$b_H^+ = 3{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{Vs} \text{ und } b_{OH}^- = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

abnorm große Werte. Als Ursache für die annähernd gleichgroßen Beweglichkeiten der meisten Ionen betrachtet man die Anlagerung von H_2O-Molekülen, also die Bildung von Komplexionen [1]. Diese weisen alle eine annähernd gleichgroße Masse auf, so daß bei gleicher Ladung das Verhältnis

$$\frac{\text{Ladung}}{\text{Masse}} \approx \text{konst.}$$

bleibt und damit auch die Beweglichkeit.
Ist n_o die Dichte (= Teilchenzahl je Raumeinheit) eines Salzes ohne Dissoziation und n die Ionendichte, so nimmt gemäß (796)

$$\alpha = \frac{n}{n_o}$$

die Leitfähigkeit $\varkappa$ den Wert

$$\varkappa = w\, q\, \alpha\, n_o (b^+ + b^-) \tag{798}$$

an. Wird dieser Ausdruck auf das Produkt $w\, n_o$ bezogen, so ergibt sich die sogenannte Äquivalent-Leitfähigkeit

$$\Lambda = \frac{\varkappa}{w\, n_o} = q\, \alpha\, (b^+ + b^-) \tag{799}$$

Bei unveränderter Temperatur kann damit die Abhängigkeit des Dissoziationsgrades α von der Dichte bzw. Konzentration der Lösung ermittelt werden.

---

1) Der Anlagerungsvorgang wird als Hydratation oder ganz allgemein als Solvatation bezeichnet.

Das Massenwirkungsgesetz liefert eine wichtige Aussage über den Dissoziationsgrad α. Danach ist die sich einstellende Ionendichte n das Ergebnis eines Gleichgewichtes zwischen dissoziierenden (ionisierenden) und rekombinierenden Vorgängen. Die Zahl der ersteren ist proportional der Anzahl $(n_o - n)$ der undissoziierten Molekeln, die der zweiten dagegen proportional n^2 (s. Gl. (728)). Die auftretenden Faktoren sind reine Temperaturfunktionen. Wir können daher schreiben:

$$\text{Zahl der Dissoziationen je s:} \quad (n_o - n)\, f(T)$$

$$\text{Zahl der Rekombinationen je s:} \quad n^2\, g(T)$$

Im Gleichgewicht gilt also

$$\frac{n^2}{n_o - n} = F(T) ,$$

und wenn der Dissoziationsgrad $\alpha = n/n_o$ eingeführt wird, folgt

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha}\, n_o = F(T)$$

LÖSUNGEN

Lösungen zu den Übungsaufgaben des 3. Kapitels

1. Bei der Vernachlässigung der Wärmeverluste durch Konvektion und Leitung ist die Heizleistung gleich der abgestrahlten Leistung. Für die pro Zeit- und Oberflächeneinheit abgestrahlte Energie gilt das Stefan-Boltzmannsche Gesetz

$$W_{\text{Strahlung}} = E\, \sigma\, T^4$$

Dabei ist E der Emissionsfaktor für die abgestrahlte Leistung (Werte für E siehe Aufgabenstellung).
Die gesuchte Emissionsökonomie ist gleich dem Emissionsstrom, dividiert durch die Heizleistung, also (bezogen auf die Flächeneinheit der Katode)

$$\eta = \frac{G}{W_{str}}$$

Die für die gegebene Stromdichte G erforderliche Temperatur der Glühkatode errechnet sich aus der Richardsonschen Gleichung

$$G = A\,T^2 e^{-\frac{qU_a}{kT}}$$

durch Logarithmieren und Iteration. Mit $b = \frac{q\,U_a}{k}$ wird

$$\ln G = \ln A + 2 \ln T - b\,\frac{1}{T}$$

bzw.

$$T = \frac{b}{\ln A - \ln G + 2 \ln T}$$

$$= \frac{0{,}5\ b}{0{,}5 \ln \frac{A}{G} + \ln T}$$

oder mit $\ln x = 2{,}3 \lg x$

$$T = \frac{0{,}2174 \cdot b}{0{,}5 \lg \frac{A}{G} + \lg T}$$

a) Für die <u>reine Wolframkatode</u> wird

$$b_w = q\,\frac{U_a}{k} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 4{,}52\ \mathrm{V}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Ws/^oK}}$$

$$b_w = \underline{5{,}24 \cdot 10^4\ {}^oK}$$

und

$$\frac{A}{G} = \frac{120\ \mathrm{A\ cm^{-2}\ grd^{-2}}}{0{,}5\ \mathrm{A\ cm^{-2}}} = \underline{240\ \mathrm{grd^{-2}}}$$

Es gilt somit

$$T/{}^oK = \frac{0{,}2174 \cdot 5{,}24 \cdot 10^4}{0{,}5 \lg 240 + \lg T/{}^oK} = \frac{11{,}37 \cdot 10^3}{1{,}19 + \lg T/{}^oK}$$

Unter der Annahme $T_1 = 2500^oK$ (geschätzt) wird

$$T_{2/{}^oK} = \frac{11{,}37 \cdot 10^3}{1{,}19 + \lg 2500} = 2478$$

Mit diesem Wert folgt abermals

$$T_{3/{}^oK} = \frac{11{,}37 \cdot 10^3}{1{,}19 + \lg 2478} = 2480$$

Dieser Näherungswert für die Temperatur T ist, da nur eine geringe Abweichung auftritt, genügend genau.
Die Heizleistung der Wolframkatode wird damit

$$W_{Str} = E_w \cdot \sigma \cdot T_w^4$$

$$= 0{,}31 \cdot 5{,}74 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W\ cm^{-2} grd^{-4}}\ \ (2480)^4\,\mathrm{grd^4}$$

$$\underline{W_{Str} = 67{,}3\ \frac{W}{cm^2}}\ ,$$

und es folgt

$$\eta_w = \frac{0{,}5\ \mathrm{Acm^{-2}}}{67{,}3\ \mathrm{Wcm^{-2}}} = 7{,}4\ \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{W}}$$

b) Für die Oxydkatode ergibt sich

$$b_{oxyd} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As} \cdot 1{,}22\ \mathrm{V}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Ws/^oK}} = 1{,}41 \cdot 10^4\ {}^oK$$

und

$$\frac{A}{G} = \frac{0{,}0455}{0{,}5} = 0{,}091\ \mathrm{grd^{-2}}$$

Es wird also

$$T/{}^oK = \frac{0{,}2174 \cdot 1{,}41 \cdot 10^4}{0{,}5\ \lg 0{,}091 + \lg T/{}^oK} = \frac{0{,}307 \cdot 10^4}{-0{,}5205 + \lg T/{}^oK}$$

Für $T_1 = 1000^oK$ (angenommen!) folgt daraus

$$T_{2/{}^oK} = \frac{3{,}07 \cdot 10^3}{-0{,}5205 + 3} = \underline{1237}$$

und weiter

$$T_{3/{}^oK} = \frac{3{,}07 \cdot 10^3}{-0{,}5205 + \lg 1237} = \underline{1194}$$

Die nächste Näherung gibt

$$T_4 = 1203^oK\ ,$$

so daß mit ausreichender Genauigkeit

$$T_{oxyd} = 1200^oK$$

gesetzt werden kann. Die Heizleistung der Oxydkatode wird damit

$$W_{oxyd} = E_{oxyd} \cdot \sigma \cdot T^4_{oxyd}$$

$$= 0{,}19 \cdot 5{,}74 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W\ cm^{-2}\ grd^{-4}}\ (1200)^4\ \mathrm{grd^4}$$

$$W_{oxyd} = \underline{2{,}3\ \frac{W}{cm^2}}\ ,$$

und es folgt

$$\eta_{oxyd} = \frac{0{,}5\ \mathrm{Acm^{-2}}}{2{,}3\ \mathrm{Wcm^{-2}}} = 217\ \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{W}}$$

Eine Oxydkatode liefert demnach annähernd das 30fache des Emissionsstromes einer Wolframkatode bei gleicher Heizleistung.

2. a) Die Sättigungsstromdichte ergibt sich wieder aus der Richardsonschen Gleichung

$$G_s = AT^2 \, e^{-\frac{q\,U_a}{kT}}$$

Für Wolfram gilt $A = 120 \frac{A}{cm^2\,grd^2}$ und $U_a = 4{,}52$ V

Es wird somit

$$G_s = 120A\ cm^{-2}\,grd^{-2}\,(2500)^2\,grd^2\ exp.\left[-\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As \cdot 4{,}52\ V}{1{,}38\ 10^{-23}\,Ws\ grd^{-1}\ 2500\ grd}\right]$$

$$= 120 \cdot 625 \cdot 10^4 \cdot e^{-21}\ Acm^{-2}$$

$$= 120 \cdot 625 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{1331}$$

$$\underline{G_s = 0{,}56\ \frac{A}{cm^2}}$$

b) Die zur Erreichung der Stromdichte G_s nötige Anodenspannung folgt aus dem Raumladungsgesetz (667b)

$$G_s = G = 2{,}33 \cdot 10^{-6}\ \frac{U_a^{3/2}}{d^2}$$

Es gilt

$$U_a^{3/2} = \frac{G_s\ d^2}{2{,}33 \cdot 10^{-6}} = \frac{0{,}56\ Acm^{-2} \cdot 2{,}25\ cm^2}{2{,}33 \cdot 10^{-6}}$$

$$\underline{U_a = 6{,}6 \cdot 10^3 V}$$

c) Bei bekannter Sättigungsstromdichte gilt für die Dichte des Anlaufstromes

$$G_a = G_s\ e^{-\frac{q\,U_a}{kT}}$$

Für $\underline{U_a = -1\ V}$ wird also

$$G_a = 0{,}56\ A\ cm^{-2}\ exp.\left[-\frac{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ As \cdot -1V}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Ws\ grd^{-1} \cdot 2500\ grd}\right]$$

$$= 0{,}56\ A\ cm^{-2}\ e^{-4{,}64}$$

$$\underline{G_a = 5{,}45\ \frac{mA}{cm^2}}$$

Für $U_a = -2$ V wird

$$G_a = 0{,}56\ \mathrm{Acm^{-2}} \cdot e^{-4{,}64 \cdot 2}$$

$$G_a = 0{,}053\ \frac{\mathrm{mA}}{\mathrm{cm}^2}$$

Bei Veränderung der Anodenspannung von - 1 V auf - 2 V wird also die Dichte des gegen die Anode anlaufenden Stromes um rund das 100fache (!) kleiner.

3. Auf S. 507 war auf Grund einer einfachen Energiebetrachtung der Zusammenhang zwischen dem Momentanwert der Elektronengeschwindigkeit v(t) - in Richtung des elektrischen Feldes - und dem Momentanwert des etwa von einem Oszillografen aufgezeichneten Stromes i(t) abgeleitet worden:

$$i_o(t) = \frac{qE}{U_o}\, v(t)$$

Hierin ist U_o die Elektrodenspannung und E die Feldstärke im Entladungsraum. Im homogenen Feld ist natürlich $E = U_o/d$, also konstant, und der Momentanwert des Stromes ist dem der Elektronengeschwindigkeit proportional.

Werden durch den Lichtblitz insgesamt N_o Elektronen an der Katode ausgelöst, so wird der zeitliche Stromverlauf

$$i(t) = \frac{q\, N_o E}{U_o}\, v(t)$$

Wir berechnen nunmehr v(t): Da die Elektronen sämtlich im gleichen konstanten Feld E "fallen", also der konstanten Beschleunigung

$$a = \frac{qE}{m}$$

unterliegen, gilt nach den Fallgesetzen für die Geschwindigkeit

$$v(t) = at = \frac{q\,E}{m}\, t,$$

sodaß wir schließlich für den Stromverlauf erhalten

$$i(t) = N_o \frac{q^2 E^2}{U_o m} t = N_o \frac{q^2 U_o}{m d^2} t$$

Es folgt also ein zeitproportionaler Anstieg des oszillografierten Stromes bis zum Zeitpunkt $t = T$, an dem die Elektronenschar die Anode erreicht. Diese Impulsdauer berechnet sich als Elektronenlaufzeit ebenfalls aus dem Fallgesetz

$$d = \frac{1}{2} a T^2$$

zu

$$T = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2dm}{q E}} = d\sqrt{\frac{2m}{qU_o}}$$

4. a) Die Brennweite einer magnetischen Linse ist durch Gl. (652)

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q}{8 m U_o} \int_{-\infty}^{+\infty} B_z^2 \, dz$$

gegeben. Dabei ist die Induktion B_z in der Achse ($x = y = 0$) zu nehmen. Wir berechnen zunächst

$$B = \mu_o H$$

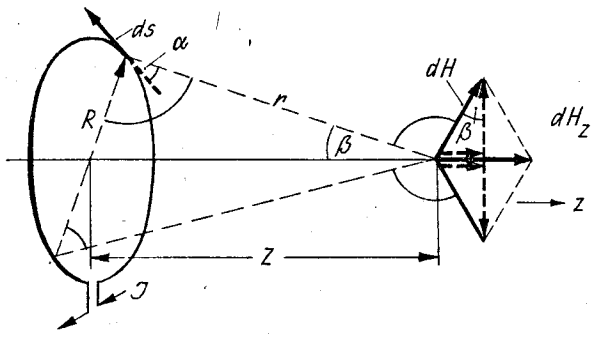
Die magnetische Erregung H wird nach Biot-Savart

$$d\mathcal{J} = \frac{J}{4\pi} \frac{d\mathcal{s} \times \mathcal{r}}{r^3}$$

Für alle Punkte der Achse stehen $d\mathcal{s}$ und $\mathcal{r}$ aufeinander senkrecht, d.h., es wird

$$dH = \frac{J}{4\pi} \frac{ds}{r^2}$$

Aus der Skizze geht hervor, daß sich die senkrecht



auf der Achse stehenden Komponenten gegenseitig aufheben. Die axiale Komponente (z-Richtung) wird

$$dH_z = dH \sin\beta = dH \frac{R}{r} ,$$

und für die gesamte Feldstärke erhalten wir

$$H_z = \frac{J}{4\pi} \oint \frac{R}{r^3}\, ds = \frac{J}{4\pi} \frac{R}{r^3}\, 2\pi R = \frac{J}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

Die Abhängigkeit von z ergibt sich über

$$r^2 = R^2 + z^2$$

zu

$$H_z(z) = \frac{J}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

und es folgt

$$B = \mu_o H_z = \mu_o \frac{J}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Für die Brennweite ergibt sich damit der Ausdruck

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q}{8\, m\, U_o} \left(\frac{\mu_o}{2} J\, R^2\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^3}$$

Das Integral lautet bei der Substitution z/R = x

$$\int \frac{dz}{(R^2 + z^2)^3} = \frac{1}{R^5} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$$

und läßt sich mit Hilfe einer Rekursionsformel (s. z.B. Hütte I, S. 92, Formel 11) ausrechnen. Es wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{4}\left[\underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{x}{1+x^2}}_{=0} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\, x \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\, x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

und damit

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q}{8\, m\, U_o}\left(\frac{\mu_o}{2} J\right)^2 \frac{1}{R}\,\frac{3}{8}\pi$$

Gegeben oder bekannt sind die Größen

$R = 2 \cdot 10^{-2}$ m; $J = 10^3$ A; $U_o = 6 \cdot 10^4$ V; $\mu_o = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \frac{Vs}{Am}$

$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As und $m = 0{,}911 \cdot 10^{-30}\ Ws^3/m^2$,

die, in obige Formel eingesetzt, das gesuchte Ergebnis liefern:

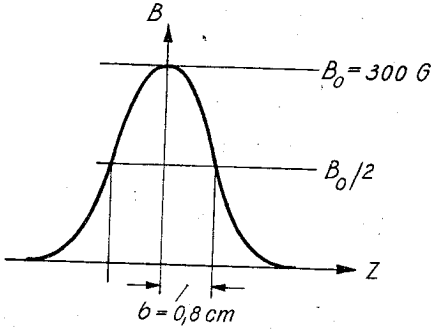
$$\frac{1}{f_m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As\,(1{,}256 \cdot 10^{-6}\,Vs/Am \cdot 10^3\,A)^2 \cdot 3\pi}{8 \cdot 0{,}911 \cdot 10^{-30}\,Ws^3/m^2 \cdot 6 \cdot 10^4\,V \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,m \cdot 8}$$

$$= 8{,}5\ m^{-1}$$

$$f_m = 0{,}117\ m = \underline{11{,}7\ cm}$$

b) Laut Aufgabenstellung hat die Induktion B(z) einen Verlauf, wie er untenstehend grafisch dargestellt ist. Die Gaußsche Fehlerfunktion lautet

$$B(z) = B_o\, e^{-\alpha z^2}$$



Mit der Halbwertsbreite b gilt

$$\frac{B(b)}{B_o} = e^{-\alpha b^2} = 0{,}5\ ,$$

woraus folgt

$$\alpha b^2 = \ln 2 = 0{,}693$$

$$\alpha = \frac{0{,}693}{b^2}$$

Damit läßt sich die Funktion B(z) angeben:

$$B(z) = B_o\, e^{-0{,}693\, z^2/b^2}$$

Für die Brennweite ergibt sich somit der Ausdruck

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q\,B_o^2}{8\,m\,U_o} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1{,}386\,z^2/b^2}\,dz$$

Substituiert man

$$u^2 = 1{,}386\,\frac{z^2}{b^2} \longrightarrow z = \frac{b}{1{,}177}\,u\,; \quad dz = \frac{b}{1{,}177}\,du\,,$$

so wird schließlich

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q\,B_o^2\,b}{8\,m\,U_o \cdot 1{,}177} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

$$= \frac{q\,B_o^2\,b}{9{,}42\,m\,U_o}\sqrt{\pi}\,,$$ 1)

und mit den gegebenen Werten

$$B_o = 300\ G = 3 \cdot 10^{-2} Vs/m^2\,, \quad b = 0{,}8 \cdot 10^{-2} m,$$

$$U_o = 6 \cdot 10^4\ V$$

ergibt sich die Brennweite

$$f_m = \frac{9{,}42 \cdot 0{,}911 \cdot 10^{-30} Ws^3/m^2 \cdot 6 \cdot 10^4\ V}{1{,}6 \cdot 10^{-19} As \cdot 9 \cdot 10^{-4} V^2 s^2/m^4 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-2} m \sqrt{\pi}}$$

$$f_m = 0{,}253\ m = \underline{25{,}3\ cm}$$

5. Ausgehend von der Poissonschen Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o}$$

erhält man bei Berücksichtigung der Radialsymmetrie (φ ist nur von r abhängig!) für die Ableitung der Raumladungskennlinie eines Zylinderfeldes den Ausdruck

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o}$$

Die Elektronengeschwindigkeit ist durch das Ortspotential $\varphi(r)$, also durch

$$v = \sqrt{\frac{2\,q}{m}\,\varphi(r)}$$

---

1) Ableitung siehe R. Rothe, Höhere Mathematik, Teil II, S. 77.

gegeben. Weiter gilt für den Betrag der Stromdichte

$$G = \varrho \; v = \varrho \sqrt{\frac{2q}{m} \varphi(r)}$$

und für den Strom selbst

$$J = G \; F = G \cdot 2 \pi r \ell$$

Wir beziehen den Strom auf die Länge 1 und schreiben

$$J_1 = 2 \pi r G = 2 \pi r \varrho \sqrt{\frac{2q}{m} \varphi(r)}$$

Daraus folgt für ϱ / ε_o die Beziehung

$$\frac{\varrho}{\varepsilon_o} = c \frac{1}{r \sqrt{\varphi(r)}} ,$$

wobei für

$$c = \frac{J_1}{2 \pi \varepsilon_o} \sqrt{\frac{m}{2q}}$$

zu setzen ist. Die Poissonsche Gleichung nimmt damit die Gestalt

$$r \sqrt{\varphi} \; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \sqrt{\varphi} \; \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - c$$

an. Die Lösung dieser Gleichung geschieht durch den Ansatz

$$\varphi = A \, r^n$$

Im einzelnen werden dann

$$\sqrt{\varphi} = \sqrt{A} \; r^{n/2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \; n \, r^{n-1}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = A \; n \, (n-1) r^{n-2}$$

und durch Einsetzen ergibt sich

$$r \sqrt{A} \; r^{n/2} \; A \, n(n-1) r^{n-2} + \sqrt{A} \, r^{n/2} \; A \, n \, r^{n-1} = - c$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von r erfüllt sein, so müssen Koeffizienten und Exponenten von r auf beiden Seiten gleich sein, also

$$1 + \frac{n}{2} + n - 2 + \frac{n}{2} + n - 1 = 0 \longrightarrow n = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{A} \, . A \, \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \sqrt{A} \; A \, \frac{2}{3} = - c \longrightarrow A = \left(\frac{9}{4} c\right)^{2/3}$$

Damit lautet die Lösung

$$\varphi(r) = \left(\frac{9}{4} c\right)^{2/3} r^{2/3}$$

$$= \left(\frac{9}{8} \frac{J_1}{\varepsilon_o \pi}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2q}\right)^{1/3} r^{2/3}$$

Für einen Zylinderkondensator mit den Radien R_a und R_i wird also

$$U = \varphi(R_a) - \varphi(R_i) = \left(\frac{9}{8}\frac{J_1}{\varepsilon_o \pi}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2q}\right)^{1/3} \left(R_a^{2/3} - R_i^{2/3}\right),$$

und die J(U)-Kennlinie hat die Form

$$J_1 = \frac{8\pi\varepsilon_o}{9}\sqrt{\frac{2q}{m}}\,\frac{U^{3/2}}{\left(R_a^{2/3} - R_i^{2/3}\right)^{3/2}}$$

Mit $R_i \ll R_a$ ergibt sich die Näherung

$$J = \frac{8\pi\varepsilon_o}{9}\sqrt{\frac{2q}{m}}\,\frac{U^{3/2}}{R_a}$$

6. Bei Vorhandensein einer Raumladung gilt die Poissonsche Gleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o}$$

Die Stromdichte in Raumladungsgebieten ist gegeben durch

$$\mathcal{J} = \varrho\, w = \varrho\, b\, \mathcal{E},$$

da $w = b\,\mathcal{E}$ sein soll.
Infolge der großen Ausdehnung der Platten ändert sich das Potential φ nur in einer, z.B. in x-Richtung.
Es gilt dann

$$\Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o},$$

wobei

$$\varrho = \frac{G}{V} = \frac{G}{b\,E}$$

und

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

zu setzen sind. Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{G}{\varepsilon_o b}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{2G}{\varepsilon_o b}$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integrieren:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = E^2 = \frac{2G}{\varepsilon_o b}x + C$$

Für $x = 0$ ist $E = E_k$ die Feldstärke an der Katode, und es wird

$$C = E_k^2$$

Da jedoch der Trägerstrom raumladungsbegrenzt sein soll, ist stets

$$E_k = 0$$

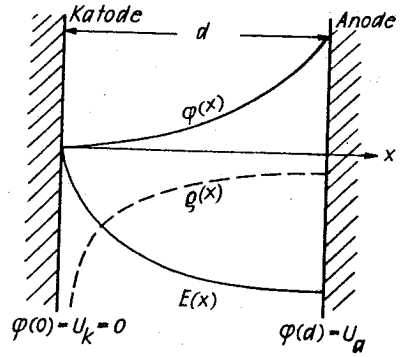
Die Feldstärke hat somit den Wert

$$\underline{E(x) = -\sqrt{\frac{2G}{\varepsilon_o b}}\, x^{1/2}}$$

Für das Potential ergibt sich daraus

$$\varphi(x) = -\int_o^x E\, dx = \sqrt{\frac{2G}{\varepsilon_o b}} \int_o^x x^{1/2}\, dx$$

$$\underline{\varphi(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2G}{\varepsilon_o b}}\, x^{3/2}} \quad ,$$



und die Raumladungsdichte wird

$$\varrho(x) = \frac{G}{b\,E} = -\frac{G}{b}\sqrt{\frac{\varepsilon_o b}{2G}}\, x^{-1/2}$$

$$\varrho(x) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_o G}{2b}}\, x^{-1/2}$$

Den Verlauf $E(x)$, $\varphi(x)$ und $\varrho(x)$ zeigt nebenstehende Skizze.

Setzt man für $x = d \longrightarrow \varphi(d) = U_a$ (s. Skizze), so läßt sich der Verlauf der Strom-Spannungs-kennlinie wie folgt angeben:

$$\underline{G = \frac{9}{8}\,\varepsilon_o\, b\, \frac{U_a^2}{d^3}}$$

7. Wir unterscheiden zwischen statischem Fall (ω_o) und dynamischem Fall (Laufzeit $\tau \approx$ Periodendauer T). Im statischen

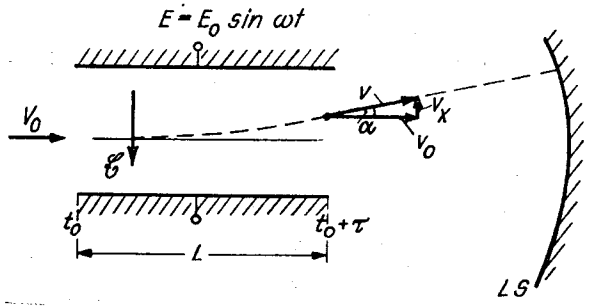
Fall gilt gemäß (624/ LB 9)

$$\operatorname{tg} \alpha_{st} = \frac{E_o \, q \, L}{m \, v_o^2}$$

oder mit $v_o^2 = 2 \, q \, U_o / m$

$$\operatorname{tg} \alpha_{st} = \frac{E_o \, L}{2 \, U_o}$$

Dabei ist E_o die Feldstärke zwischen den Ablenkplatten (Scheitelwert), L die Länge der Ablenkplatten und α_{st} der maximale Ablenkungswinkel (s. Skizze).



Im dynamischen Fall gilt

$$\operatorname{tg} \alpha_{dyn} = \frac{v_x}{v_o} = v_x \sqrt{\frac{m}{2 \, q \, U_o}}$$

Die Geschwindigkeitskomponente v_x berechnet sich über

$$m\ddot{x} = q \, E_o \sin \omega_1 \, t$$

zu

$$\dot{x} = v_x = \frac{q \, E_o}{m} \int_{t_o}^{t_o+\tau} \sin \omega_1 t \, dt$$

$$= - \frac{q \, E_o}{m \, \omega_1} \left[\cos \omega_1 (t_o + \tau) - \cos \omega_1 t_o \right]$$

$$= \frac{q \, E_o}{m \, \omega_1} 2 \sin \omega_1 (t_o + \tau/2) \sin \omega_1 \, \tau/2$$

Die Geschwindigkeitskomponente v_x der Ablenkung und damit die Ablenkung selbst hängen also vom Zeitpunkt t_o, d.h. von der

Phasenlage der Ablenkspannung beim Elektroneneintritt ab. Für den dynamischen Ablenkwinkel ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha_{dyn} = \frac{v_x}{v_o} = \frac{2\, q\, E_o}{m\, \omega_1\, v_o} \sin \omega_1 \,(t_o + \tau/2) \sin \omega_1 \,\tau/2$$

Die maximale Ablenkung erhält man, wenn

$$\sin \omega_1 \,(t_o + \tau/2) = 1$$

gesetzt wird. Es gilt dann

$$\operatorname{tg} \alpha_{dyn} = \frac{2\, q\, E_o}{m\, \omega_1\, v_o} \sin \omega_1 \,\tau/2$$

Wir bezeichnen das Verhältnis der Strichlängen auf dem Leuchtschirm mit η und schreiben (für maximale Ablenkung) mit den oben gefundenen Ausdrücken $\operatorname{tg} \alpha_{dyn}$ und $\operatorname{tg} \alpha_{st}$

$$\eta_{max} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{dyn}}{\operatorname{tg} \alpha_{st}} = \frac{2\, v_o}{\omega_1\, L} \sin \omega_1 \frac{\tau}{2}$$

Da ferner $\tau = L/v_o$ ist, ergibt sich schließlich

$$\eta_{max} = \frac{\sin \omega_1 \,\tau/2}{\omega_1 \,\tau/2}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\omega_1 = 2{,}5 \cdot 10^9 \ s^{-1}, \quad U_o = 3 \cdot 10^3 V \quad \text{und} \quad L = 4 \cdot 10^{-2} m$$

wird zunächst (nach Gl. 623b)

$$v_o = 5{,}94 \cdot 10^5 \sqrt{U_o [V]} \left[\frac{m}{s}\right] = 5{,}94 \cdot 10^5 \sqrt{3 \cdot 10^3 \ V}$$

$$v_o = 3{,}25 \cdot 10^7 \ \frac{m}{s},$$

$$\tau = \frac{L}{v_o} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \ m}{3{,}25 \cdot 10^7 \ m/s} = 1{,}23 \cdot 10^{-9} \ s$$

und

$$\omega_1 \frac{\tau}{2} = 1{,}25 \cdot 10^9 \ s^{-1} \cdot 1{,}23 \cdot 10^{-9} \ s = 1{,}54$$

Mit diesen Zahlenwerten wird das maximale Verhältnis der Strichlängen

$$\eta_{max} = \frac{\sin 1{,}54}{1{,}54} = 0{,}65$$

8. a) Gemäß (684) ist die Umlaufzeit eines Teilchens

$$\tau = \frac{2\,\pi\,m_{He}}{q_{He}\,B} = \frac{1}{f}$$

Mit dem vorgegebenen Wert $B = 0{,}45\ Vs/m^2$ und bei Berücksichtigung von

$$q_{He} = 2\,q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ As$$

$$m_{He} = 4 \cdot M = 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Ws^3/m^2$$

wird also die Frequenz f der Beschleunigungsspannung

$$f = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As \cdot 0{,}45\ Vs/m^2}{2\,\pi \cdot 4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Ws^3/m^2}$$

$$f = 3{,}45 \cdot 10^6\ Hz$$

Die Amplitude U_m der Beschleunigungsspannung ergibt sich aus der durch die doppelte Anzahl von Umläufen [1] dividierten Differenz zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung. Es gilt also

$$U_m = \frac{U_e - U_o}{2 \cdot 120}$$

oder mit den gegebenen Zahlenwerten

$$U_m = \frac{(25 - 1{,}5)\ 10^6 V}{2 \cdot 120} = 98 \cdot 10^3 V$$

b) Da es sich hier um klassische Verhältnisse (m = konst.) handelt, wird gemäß (627a) der Radius von Ein- und Austritt der Teilchen

$$R_o = \frac{m\,v_o}{qB} \quad \text{und} \quad R_e = \frac{m\,v_e}{qB} = R_o\,\frac{v_e}{v_o}$$

Die Einschußgeschwindigkeit v_o beträgt

1) Die Teilchen werden je Umlauf zweimal beschleunigt!

$$v_o = \sqrt{\frac{2\,q\,U_o}{m}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V}}{4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Ws^3/m^2}}} = \underline{1{,}2 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s}}$$

und die Austrittsgeschwindigkeit v_e

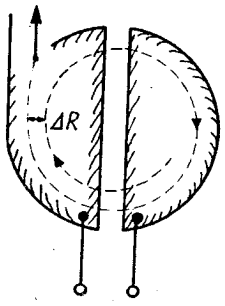
$$v_e = \sqrt{\frac{2\,q\,U_e}{m}} = v_o \sqrt{\frac{U_e}{U_o}} = \underline{4{,}9 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s}}$$

Damit ergeben sich die Bahnradien bei Ein- und Austritt der Teilchen zu

$$R_o = \frac{4 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Ws^3/m^2} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 0{,}45\ \mathrm{Vs/m^2}} = \underline{0{,}554\ \mathrm{m}}$$

$$R_e = 0{,}554\ \mathrm{m}\ \frac{4{,}9 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}{1{,}2 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}} = \underline{2{,}26\ \mathrm{m}}$$

c) Bezeichnen wir den radialen Abstand der beiden letzten Teilchenbahnen mit ΔR (s. nebenstehende Skizze), so ergibt sich durch Differentiation von (627b)



$$\Delta R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,m}{q}}\ \frac{U^{-1/2}}{B}\ \Delta U = \frac{\Delta U}{vB}$$

Für einen Umlauf (2 Beschleunigungsstufen) ist

$$\Delta U = 2\,U_m = 2 \cdot 98 \cdot 10^{3}\ \mathrm{V},$$

und für v kann die Endgeschwindigkeit v_e eingesetzt werden. Es wird dann

$$\Delta R = \frac{196 \cdot 10^{3}\ \mathrm{V}}{4{,}9 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}45\ \mathrm{Vs/m^2}} = 0{,}89 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\Delta R = 8{,}9\ \mathrm{mm}}$$

d) Bei der Verdoppelung der Einschußspannung ($U_o^* = 2U_o$) beträgt die Einschußgeschwindigkeit

$$v_o^* = \sqrt{\frac{2\,q\,U_o^*}{m}} = \sqrt{\frac{2\,q\,2U_o}{m}} = v_o\sqrt{2}$$

$$= 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ m/s } \sqrt{2} = \underline{1{,}7 \cdot 10^7 \text{ m/s}}$$

Damit wird der Bahnradius beim Eintritt des Teilchens entsprechend größer, nämlich

$$R_o^* = \frac{m\,v_o^*}{qB} = R_o\,\frac{v_o^*}{v_o} = 0{,}554 \text{ m}\sqrt{2}$$

$$\underline{R_o = 0{,}78 \text{ m}}$$

Die <u>eingesparte Magnetisierungsfläche</u> beträgt folglich

$$\Delta F = (R_o^{*2} - R_o^2)\,\pi = (0{,}61 - 0{,}31)\text{ m}^2 \cdot \pi$$

$$\underline{\Delta F = 0{,}94 \text{ m}^2}$$

oder prozentual gerechnet

$$\frac{\Delta F}{F_{ges}} = \frac{\Delta F}{\pi R_e^2} = \frac{0{,}94 \text{ m}^2}{\pi \cdot 5{,}1 \text{ m}^2} \approx 0{,}06 \triangleq \underline{6\ \%}$$

9. a) Die <u>Amplitude der Beschleunigungsspannung</u> ergibt sich mit der Eintritts- und Austrittsamplitude (U_e und U_a) und der Umlaufzahl n zu

$$U_m = \frac{U_a - U_e}{n} = \frac{(10^{10} - 9 \cdot 10^6)\text{ V}}{4{,}5 \cdot 10^6}$$

$$\underline{U_m = 2{,}22 \cdot 10^3 \text{ V}}$$

b) Gemäß (684) lautet die Resonanzbedingung

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{2\,\pi\,R_o}{v}$$

Beim Eintritt der Teilchen kann noch klassisch gerechnet werden, da die Eintrittsgeschwindigkeit v_e gleich

$$v_e = \sqrt{\frac{2\,q\,U_e}{M_o}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 9 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Ws^3/m^2}}} = 4{,}15 \cdot 10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

und damit

$$\beta = \frac{v_e}{c} = 0{,}14 \quad \text{oder} \quad \sqrt{1-\beta^2} = 0{,}99$$

wird. Für die Frequenz ergibt sich also

$$f_e = \frac{4{,}15 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}{2\,\pi \cdot 29\,\mathrm{m}} = \underline{0{,}228 \cdot 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}}$$

und für die Induktion des Magnetfeldes (vgl. S. 584, Mitte)

$$B_e = \frac{M_o\,v_e}{q\,R_o} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Ws^3/m^2} \cdot 4{,}15 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 29\,\mathrm{m}}$$

$$\underline{B_e = 1{,}49 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}}}$$

Der Ausstoß der Teilchen muß dagegen relativistisch behandelt werden, da die Austrittsgeschwindigkeit v_a

$$v_a = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{q\,U_a}{M_o c^2}}\right)^2}$$

$$v_a = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 10^{10}\,\mathrm{V}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{Ws^3/m^2} \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2/s^2}}}\right)^2}$$

$$= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{11{,}65}\right)^2} \approx c$$

wird. Die Frequenz beim Ausstoß der Teilchen beträgt damit

$$f_a = \frac{c}{2\pi R_o} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2\pi \cdot 29 \text{ m}} = \underline{1{,}64 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}}$$

und die Induktion des Magnetfeldes (bei Berücksichtigung von (679))

$$B_a = \frac{M v_a}{q R_o} = \frac{M_o c}{q R_o \sqrt{1-\beta^2}} \; ; \quad \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{11{,}65}$$

$$= \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{Ws}^3/\text{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{m/s} \cdot 11{,}65}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 29 \text{ m}} = \underline{1{,}26 \text{ Vs/m}^2}$$

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

4. Kapitel: Ladungsträger in Gasen (Fortsetzung) 651

75 Nichtstationäre Trägerbewegung (Fortsetzung) 651

2. Verhalten elektromagnetischer Wellen in ionisierten Gasen 651

5. Kapitel: Die Elektrizitätsleitung in Gasen und Dämpfen (Gasentladungen) 653

76 Allgemeine Gesichtspunkte 653

1. Stromverteilung 653
2. Ladungstransport in ionisierten Gasen 654
3. Raumladungswirkungen 655
4. Ähnlichkeitsgesetze 656

77 Typische Entladungsteile 658

1. Das Plasma 659
2. Die positive Säule 664

78 Die selbständige Entladung 671

1. Kennzeichnung 671
2. Die Glimmentladung 672
3. Die Koronaentladung 677
4. Die Bogenentladung 679
5. Die Zündung der selbständigen Entladung 683
6. Die vollständige Charakteristik der selbständigen Entladung 685
7. Grundsätzliches über Funkenentladungen 686

Übungsaufgaben (4. und 5. Kapitel) 687

6. Kapitel: Stromleitung in Elektrolyten 688

79 Experimentelle Tatsachen 688
80 Die Dissoziationstheorie nach Arrhenius 689

1. Dissoziationsgrad und Leitvermögen 689

Lösungen 691